

**C. NĂSTĂSESCU
C. NIȚĂ
I. STĂNESCU**

ALGEBRĂ

XI

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMINTULUI

C. NĂSTĂSESCU
I. STĂNESCU

C. NIȚA

Matematică

Manual pentru clasa a XI-a

Elemente de algebră
superioară



Editura Didactică și Pedagogică
București

CAPITOLUL I

Permutari

Am făcut cunoștință cu noțiunea de **permutare** a unei mulțimi finite încă din clasa a X-a (Algebră, clasa a X-a). Fiind dată o mulțime finită A , avînd n elemente, ea se poate ordona în diverse moduri, în sensul că fiecărui element al său i se asociază un anumit număr de la 1 la n , numit rangul elementului.

Mulțimea A cu o astfel de ordine se numește **permutare** a acestei mulțimi. Se arată, de asemenea, că a face o permutare a elementelor mulțimii A este totuna cu a defini o funcție bijectivă a mulțimii A pe ea însăși (Algebră, clasa a X-a).

Să presupunem acum că elementele mulțimii A sînt numerotate de la 1 la n ; deci $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (adică mulțimea A este ordonată). În această mulțime a_1 este primul element, a_2 este al doilea element, ..., a_n este ultimul element.

Dacă $\varphi : A \rightarrow A$ este o funcție bijectivă, atunci putem scrie $\varphi(a_k) = a_{i_k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), a_{i_k} fiind unul dintre elementele a_1, a_2, \dots, a_n ; deci i_k este unul dintre numerele $\{1, 2, \dots, n\}$. Se observă că în felul acesta funcției bijective φ i se asociază funcția bijectivă $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ definită prin egalitatea $\sigma(k) = i_k$.

Invers, unei funcții bijective σ a mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ pe ea însăși i se poate asocia o funcție bijectivă a mulțimii A . Din aceste motive în cele ce urmează vom studia permutările mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ sau, ceea ce este același lucru, funcțiile bijective ale mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ pe ea însăși.

1. Noțiunea de permutare (substituție). Să notăm cu A mulțimea primelor n numere naturale, adică $A = \{1, 2, \dots, n\}$. O funcție bijectivă $\sigma : A \rightarrow A$ se numește **permutare (substituție) de gradul n** .

Vom nota mulțimea tuturor permutărilor de gradul n cu S_n sau σ_n , iar elementele din S_n le vom nota cu literele mici grecești: $\varphi, \psi, \theta, \dots, \sigma, \tau$. Se obișnuiește ca o permutare σ de gradul n să se noteze astfel:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad (1)$$

adică printr-un tablou în care în linia a doua se scot în evidență toate valorile funcției σ . Deoarece σ este o funcție bijectivă, toate aceste valori $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, ..., $\sigma(n)$ sînt distincte două cite două și sînt tot numerele 1, 2, ..., n , eventual, în altă ordine.

Cunoaștem din Algebra pentru clasa a X-a că numărul tuturor permutărilor de gradul n este $n!$.

În mulțimea S_n distingem un element remarcabil și anume funcția identică $1_A: A \rightarrow A$, care poartă denumirea de *permutare identică*, notată cu e .

Folosind notația (1) pentru permutări, atunci e are scrierea

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Exemple. 1) Dacă $n = 1$, atunci S_1 are un singur element, acest element este permutarea identică (adică, funcția identică a mulțimii $A = \{1\}$).

2) Dacă $n = 2$, atunci S_2 are $2! = 2$ elemente. Aceste elemente sînt permutările:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ (permutarea identică) și permutarea } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Dacă $n = 3$, atunci S_3 are $3! = 6$ elemente. Aceste elemente sînt permutările:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Produsul (compunerea) permutărilor. Fie σ și τ două permutări de gradul n , adică $\sigma \in S_n$, $\tau \in S_n$. Cum $\sigma: A \rightarrow A$ și $\tau: A \rightarrow A$ sînt funcții bijective ale mulțimii A pe ea însăși, are sens să vorbim de compunerea $\sigma \circ \tau$ a acestor funcții, care este tot o funcție bijectivă (a se vedea manualul de Algebră, clasa a IX-a). Reamintim că $\sigma \circ \tau: A \rightarrow A$ și este definită prin egalitatea:

$$(\sigma \circ \tau)(a) = \sigma(\tau(a)), \text{ oricare ar fi } a \in A.$$

Deci $\sigma \circ \tau$ este o permutare de gradul n ; această permutare poartă denumirea de *produsul (sau compunerea) permutărilor* σ și τ (în această ordine). Se notează mai simplu $\sigma\tau$. Operația prin care din permutările σ și τ obținem permutarea $\sigma\tau$ poartă denumirea de *înmulțirea (sau compunerea) permutărilor*. Folosind notația (1) pentru permutări, dacă

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ și } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}$$

atunci produsul $\sigma\tau$ se scrie astfel:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \dots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Notăm $\sigma^2 = \sigma\sigma$; $\sigma^3 = \sigma^2\sigma$; $\sigma^4 = \sigma^3\sigma$; ...; $\sigma^{n+1} = \sigma^n\sigma$; ...

Observații. 1) Trebuie observat că nu are sens să vorbim despre produsul a două permutări de grade diferite.

2) Cînd σ și τ sînt două permutări de același grad, putem face atât produsul $\sigma\tau$ cît și produsul $\tau\sigma$.

Exemplu. Să considerăm permutările de gradul 3:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ și } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Produsul } \sigma\tau \text{ este permutarea}$$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{iar } \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se observă că $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

Proprietățile înmulțirii (compunerii) permutărilor

Ținând cont de proprietățile compunerii funcțiilor (a se vedea Algebra, clasa a IX-a) avem următoarele proprietăți ale înmulțirii permutărilor:

1° *Înmulțirea permutărilor este asociativă*, adică oricare ar fi permutările φ , ψ , θ din S_n , avem

$$\varphi(\psi\theta) = (\varphi\psi)\theta.$$

Această proprietate a înmulțirii ne permite să folosim scrierea:

$$\varphi(\psi\theta) = (\varphi\psi)\theta = \varphi\psi\theta.$$

2° *Element neutru.* Permutarea identică de gradul n

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

este element neutru pentru înmulțirea permutărilor, adică oricare ar fi $\varphi \in S_n$ avem $e\varphi = \varphi e = \varphi$.

Cum orice funcție bijectivă este inversabilă (Algebra, clasa a IX-a), avem proprietatea

3° *Orice permutare are inversă*, adică oricare ar fi permutarea $\varphi \in S_n$, există o permutare $\varphi^{-1} \in S_n$ astfel încît

$$\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = e.$$

Permutarea φ^{-1} se numește *inversa permutării* φ .

Exemplu. Considerăm permutarea $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Inversa permutării φ este permutarea

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

În exemplul pe care l-am dat mai înainte s-a arătat că dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ și

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ atunci } \sigma\tau \neq \tau\sigma.$$

Observație. Dacă φ și ψ sînt din S_n în general $\varphi\psi \neq \psi\varphi$, adică înmulțirea permutărilor nu este comutativă.

3. **Transpoziții.** Fie $i, j \in A = \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$. Definim funcția $\tau_{ij} : A \rightarrow A$ prin egalitatea

$$\tau_{ij}(k) = \begin{cases} j & \text{dacă } k = i, \\ i & \text{dacă } k = j, \\ k & \text{dacă } k \neq i, j. \end{cases} \quad (3)$$

Se vede că τ_{ij} este o funcție bijectivă, deci o permutare de gradul n . O astfel de permutare se numește *transpoziție* și se notează simplu $\tau_{ij} = (ij)$. Folosind scrierea (1) a permutărilor:

$$\tau_{ij} = (ij) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & k & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Se vede că τ_{ij} permută efectiv numai numerele i și j .

Să calculăm τ_{ij}^2 ; dacă $k \neq i, j$, atunci $\tau_{ij}^2(k) = \tau_{ij}(\tau_{ij}(k)) = \tau_{ij}(k) = k$; dacă $k = i$, atunci $\tau_{ij}^2(i) = \tau_{ij}(\tau_{ij}(i)) = \tau_{ij}(j) = i$, iar dacă $k = j$ avem $\tau_{ij}^2(j) = \tau_{ij}(\tau_{ij}(j)) = \tau_{ij}(i) = j$. Deci $\tau_{ij}^2(k) = k$ oricare ar fi $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Deci $\tau_{ij}^2 = e$. De aici obținem că $\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij}$. Deci transpoziția de gradul n , $\tau_{ij} = (ij)$ are următoarele proprietăți:

- a) $(ij) = (ji)$,
- b) $(ij)^{-1} = (ij)$,
- c) $(ij)^2 = e$.

Din proprietatea a) rezultă că numărul tuturor transpozițiilor de gradul n este egal cu numărul perechilor ordonate (i, j) cu $1 \leq i < j \leq n$, care este egal cu C_n^2 . Deci:

Numărul tuturor transpozițiilor de gradul n este egal cu C_n^2 .

Exemple. 1) Transpozițiile de gradul 3 sînt următoarele: (12) ; (13) ; (23) .

2) Transpozițiile de gradul 4 sînt următoarele: (12) ; (13) ; (14) ; (23) ; (24) ; (34) .

4. Inversiunile unei permutări. Signatura (semnul) unei permutări. Fie $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Definim submulțimea M a produsului cartezian $A^2 = A \times A$ ca fiind: $M = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare de gradul n , o pereche ordonată $(i, j) \in M$ se numește *inversiune* a permutării σ dacă $\sigma(j) < \sigma(i)$. Vom nota cu $m(\sigma)$ numărul tuturor inversiunilor permutării σ . Se observă că $m(\sigma)$ este cel mult egal cu numărul elementelor mulțimii M , care este egal cu C_n^2 . Deci

$$0 \leq m(\sigma) \leq C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Numărul $\epsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ se numește *signatură (semnul) permutării σ* . Se observă că signatura unei permutări este $+1$ sau -1 . Permutarea σ se zice *pară*, respectiv *impară*, dacă $\epsilon(\sigma) = +1$, respectiv $\epsilon(\sigma) = -1$.

Exemple. 1) Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Numărul de inversiuni ale acestei permutări este $m(\sigma) = 3$ și deci signatura permutării σ este $\epsilon(\sigma) = (-1)^3 = -1$, adică σ este impară.

2) Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Numărul de inversiuni ale acestei permutări este $m(\sigma) = 6$ și deci $\epsilon(\sigma) = (-1)^6 = +1$, adică permutarea σ este pară.

3) Dacă e este permutarea identică (de gradul n), atunci $m(e) = 0$ și deci $\epsilon(e) = +1$, adică e este o permutare pară.

Teorema 1. Dacă $\tau_{ij} = (ij)$ ($i < j$) este o transpoziție de gradul n , atunci $\varepsilon(\tau_{ij}) = -1$. Cu alte cuvinte, orice transpoziție este impară.

Demonstrație. Fie $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dacă $k < i$ atunci, deoarece $\tau_{ij}(k) = k$ și $\tau_{ij}(i) = j$, rezultă $\tau_{ij}(k) < \tau_{ij}(i)$ și deci perechea (k, i) nu este o inversiune a lui τ_{ij} . Analog, dacă $j < k$, rezultă că perechea (j, k) nu este o inversiune a permutării τ_{ij} .

Presupunem acum că $i < k < j$. Cum $\tau_{ij}(i) = j$ și $\tau_{ij}(k) = k$, atunci $\tau_{ij}(k) < \tau_{ij}(i)$ și deci perechea (i, k) este o inversiune a permutării τ_{ij} . Analog, cum $\tau_{ij}(j) = i$, atunci $\tau_{ij}(j) < \tau_{ij}(k)$ și deci perechea (k, j) este o inversiune a lui τ_{ij} . Deci toate perechile (i, k) și (k, j) la care se mai adaugă și perechea (i, j) sînt toate inversiunile permutării τ_{ij} . În concluzie, numărul total de inversiuni ale lui τ_{ij} este

$$m(\tau_{ij}) = 2(j - i - 1) + 1 = 2(j - i) - 1.$$

Cum $m(\tau_{ij})$ este un număr impar, atunci $\varepsilon(\tau_{ij}) = -1$.

Teorema 2. Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare de gradul n , atunci are loc egalitatea:

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}. \quad (4)$$

Demonstrație. Produsul $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ (5) are C_n^2 factori. Să considerăm factorul $\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ ($i < j$). Dacă notăm $\sigma(i) = l$ și $\sigma(j) = m$, atunci $l \neq m$ și l, m aparțin mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$. Înseamnă că $\sigma(i) - \sigma(j) = l - m$ se simplifică cu numitorul din factorul $\frac{\sigma(l) - \sigma(m)}{l - m}$ dacă $l < m$, sau cu numitorul din factorul $\frac{\sigma(m) - \sigma(l)}{m - l}$ dacă $m < l$. Prin simplificare obținem -1 dacă (i, j) este o inversiune și $+1$, în caz contrar. Cum orice numărator din produsul (5) se regăsește ca numitor în alt factor cu semnul $+$ sau $-$, atunci produsul (5) după simplificare va fi un produs de $(+1)$ și de (-1) ; numărul de (-1) va fi egal cu numărul de inversiuni ale permutării σ . În concluzie produsul (5) va fi egal cu $\varepsilon(\sigma)$, adică egalitatea (4).

Teorema 3. Dacă σ și τ sînt permutări din S_n , atunci

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$$

(adică signatura produsului a două permutări este egală cu produsul signaturilor celor două permutări).

Demonstrație. Din teorema 2 avem

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma\tau) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\sigma\tau)(i) - (\sigma\tau)(j)}{i - j} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{i - j} = \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j}. \end{aligned}$$

Exact ca în teorema 2 se poate arată că $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)}$ este egal cu signatura permutării σ . Deci $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$.

Textul prevăzut cu o bară verticală în marginea paginii este facultativ.

Consecința 1. Permutarea $\sigma\tau$ este pară (respectiv impară) dacă ambele permutări σ și τ au același semn (respectiv semne contrare).

În particular, permutările σ și σ^{-1} au același semn.

5. Descompunerea unei permutări în produs de transpoziții.

Teorema 4. Orice permutare din S_n ($n \geq 2$) este un produs de transpoziții.

Demonstrație. Să notăm cu i numărul elementelor $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ pentru care $\sigma(i) \neq i$. Vom proceda prin inducție după i . Dacă $i = 0$, atunci σ este permutarea identică e . Dar cum $e = (1\ 2)(1\ 2)$, în acest caz afirmația este demonstrată. Presupunem că $i \geq 1$ și că afirmația este adevărată pentru $1, 2, \dots, i-1$. Cum $i \geq 1$, există un număr i_1 , $1 \leq i_1 \leq n$ astfel încât $\sigma(i_1) = i_2$ și $i_1 \neq i_2$. Considerăm permutarea $\sigma' = \tau\sigma$ unde $\tau = (i_1\ i_2)$. Se vede că dacă $\sigma(j) = j$, atunci $j \neq i_1$ și $j \neq i_2$. În acest caz $\sigma'(j) = \tau(\sigma(j)) = \tau(j) = j$. Dacă $j = i_1$, avem $\sigma'(i_1) = \tau(\sigma(i_1)) = \tau(i_2) = i_1$. Deci există cel mult $i-1$ numere j cuprinse între 1 și n pentru care $\sigma'(j) \neq j$. Din ipoteza de inducție rezultă că σ' este un produs de transpoziții, $\sigma' = \tau_1\tau_2 \dots \tau_h$ sau $\tau\sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_h$. Înmulțind la stînga cu τ obținem că $\tau^2\sigma = \tau\tau_1\tau_2 \dots \tau_h$. Cum $\tau^2 = e$, atunci $\sigma = \tau\tau_1\tau_2 \dots \tau_h$.

Exemplu. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ și s-o scriem ca produs de transpoziții.

Cum $\sigma(1) = 3$, atunci $\sigma(1) \neq 1$ și considerăm transpoziția $\tau_1 = (13)$.

Facem produsul $\sigma' = \tau_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Cum $\sigma'(2) = 5$, atunci $\sigma'(2) \neq 2$ și considerăm transpoziția $\tau_2 = (25)$. Facem produsul $\sigma'' = \tau_2\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (45)$.

Deci $(45) = \tau_2\sigma' = \tau_2\tau_1\sigma = (25)(13)\sigma$, de unde obținem că $\sigma = (13)(25)(45)$. (Pentru obținerea lui σ am înmulțit egalitatea $(45) = (25)(13)\sigma$, la stînga, cu produsul $(13)(25)$.)

Consecința 2. Orice permutare pară (respectiv impară) este un produs al unui număr par (respectiv impar) de transpoziții.

Demonstrație. Fie $\sigma \in S_n$ și $\sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_n$ o descompunere a lui σ în produs de transpoziții. Din teorema 3 avem că $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2) \dots \varepsilon(\tau_n)$. Din teorema 1 obținem că $\varepsilon(\sigma) = (-1)^n$. Dacă $\varepsilon(\sigma) = +1$, atunci n este par; dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$, atunci n este impar.

Vom nota cu A_n mulțimea permutărilor pare de gradul n . Din consecința 1 rezultă că dacă $\sigma, \tau \in A_n$, atunci $\sigma\tau \in A_n$ și $\sigma^{-1} \in A_n$. În plus, A_n conține permutarea identică e .

Consecința 3. A_n are $\frac{n!}{2}$ elemente.

Demonstrație. Să notăm cu I_n permutările impare de gradul n . Fie τ_0 o transpoziție de gradul n , fixată. Deci putem defini funcția $f: A_n \rightarrow I_n$, $f(\sigma) = \sigma\tau_0$. Funcția f este bijectivă. Într-adevăr dacă $f(\sigma) = f(\sigma')$, atunci $\sigma\tau_0 = \sigma'\tau_0$, de unde $(\sigma\tau_0)\tau_0^{-1} = (\sigma'\tau_0)\tau_0^{-1}$ și deci $\sigma = \sigma'$. Deci f este injectivă. Fie $\tau \in I_n$; din consecința 1, rezultă că $\tau\tau_0 \in A_n$. Dar se vede că $f(\tau\tau_0) = (\tau\tau_0)\tau_0 = \tau\tau_0^2 = \tau$ și deci f este surjectivă. În concluzie, f este bijectivă. Deci A_n și I_n au același număr de elemente. Cum $S_n = A_n \cup I_n$ și $A_n \cap I_n = \emptyset$ deducem că A_n și I_n au fiecare $\frac{n!}{2}$ elemente.

Exerciții

1. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\sigma\tau$ și $\tau\sigma$.
2. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Să se calculeze puterile $\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \dots$. Să se determine cel mai mic număr natural $k > 0$ pentru care $\sigma^k = e$.
3. Fie $\sigma \in S_n$. Să se arate că există un număr natural $p > 0$ astfel încît $\sigma^p = e$.
4. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Să se arate că $\sigma\tau = \tau\sigma$.
5. Să se determine numărul de inversiuni și signatura pentru fiecare dintre permutările următoare:
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
6. Să se scrie toate transpozițiile de gradul 4.
7. Fie $H \subset S_n$, $H \neq \emptyset$ și avînd proprietatea că oricare ar fi $\sigma, \tau \in H$, atunci $\sigma\tau \in H$. Să se arate că H conține permutarea identică de gradul n și dacă $\sigma \in H$, atunci și $\sigma^{-1} \in H$.
8. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Să se scrie σ ca produs de transpoziții. Aceeași problemă pentru permutarea $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
9. Să se determine permutarea $\sigma \in S_n$ care are numărul maxim de inversiuni.
10. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & i & 5 & 6 & j & 9 \end{pmatrix}$. Să se determine i și j astfel încît σ să fie o permutare pară. Există i și j astfel încît σ să fie impară?
11. Fie permutarea $\sigma \in S_{2n}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}.$$

Să se determine numărul inversiunilor permutării σ .
 Să se determine n astfel încît σ să fie pară (respectiv impară).
12. Fie permutarea $\sigma \in S_{2n}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n & 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine numărul inversiunilor permutării σ .
13. Fie $\sigma \in S_n$ ($n \geq 3$) dacă $\sigma\varphi = \varphi\sigma$ oricare ar fi $\varphi \in S_n$, să se arate că $\sigma = e$.

Matrice

[illegible]

A rezolva sistemul (1) înseamnă a determina toate sistemele ordonate de numere $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ astfel încât înlocuind în sistem necunoscutele x_1, x_2, \dots, x_n respectiv cu numerele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ fiecare dintre ecuațiile sistemului este verificată. Se știe că un astfel de sistem pentru cazul $m = n = 2$ sau $m = n = 3$ se rezolvă folosind metoda reducerii sau metoda substituției. Cum practica impune rezolvarea unor sisteme (1) care au un număr mare de ecuații și necunoscute, metodele învățate în clasele anterioare sînt, în general, ineficiente. Din aceste motive se impune un studiu mai atent al sistemelor, de ecuații liniare. În acest studiu un rol important îl au următoarele două tablouri:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

În cele ce urmează vom face un studiu sistematic al matricelor, al operațiilor cu matrice etc.

Un alt motiv care a impus introducerea noțiunii de matrice și a calculului cu matrice a fost „algebrizarea noțiunii de transformare geometrică”. Mai precis, unei transformări geometrice i se asociază o matrice, reducând astfel studiul transformărilor geometrice la studiul unor matrice de un anumit tip.

Manualul de față nu ne permite să prezentăm acest aspect al folosirii calculului matriceal

① **Noțiunea de matrice.** Vom nota cu \mathbb{C} , așa cum am obișnuit, mulțimea numerelor complexe.

Fie $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$ mulțimea primelor m , respectiv n , numere naturale nenule. Vom numi *matrice de tipul (m, n)* o funcție $A : M \times N \rightarrow \mathbb{C}$. Dacă notăm $A(i, j) = a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i \in M$, $j \in N$, vom nota pe A sub forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

adică printr-un tablou cu m linii și n coloane ce cuprinde valorile funcției A . Datorită notației (1), în loc de matrice de tipul (m, n) se mai spune *matrice cu m linii și n coloane*. Numerele a_{ij} se numesc *elementele matricei A* . De multe ori pentru matricea A se mai folosește notația prescurtată:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ sau } A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}$$

Se observă că o matrice de tipul (m, n) are mn elemente

Cazuri particulare: I) Dacă $n = 1$, o matrice de tipul $(m, 1)$ se numește *matrice coloană* și este de forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

II) Dacă $m = 1$, o matrice de tipul $(1, n)$ se numește *matrice-linie* și este de forma

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}).$$

III) Dacă $m = n$, o matrice de tipul (n, n) se numește *matrice pătratică de ordinul n* .

Dacă

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

este o matrice pătratică de ordinul n , sistemul ordonat de elemente $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn})$ se numește *diagonala principală* a matricei A , iar sistemul ordonat de elemente $(a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1})$ se numește *diagonala secundară* a matricei.

Vom nota cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ mulțimea tuturor matricelor de tipul (m, n) având elementele numere complexe. În cazul că $m = n$, vom nota în loc de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, mai simplu $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. ($\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este mulțimea matricelor pătratice de ordinul n .) Elementele mulțimii $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ le vom nota cu literele mari ale alfabetului latin: A, B, C, \dots sau A', B', C', \dots .

În mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ distingem câteva submulțimi importante, și anume: $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, care reprezintă mulțimea matricelor de tip (m, n) cu elemente numere reale; $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, care reprezintă mulțimea matricelor de tip (m, n) cu elemente numere raționale; $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, care reprezintă mulțimea matricelor de tip (m, n) cu elemente numere întregi.

Este clar că avem incluziunile:

$$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}).$$

Exemple. 1) Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ este o matrice de tipul $(2, 3)$ cu elemente numere întregi, deci $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z})$. Elementele acestei matrice sînt: $a_{11} = 1$; $a_{12} = 0$; $a_{13} = 2$; $a_{21} = -1$; $a_{22} = 1$; $a_{23} = 3$.

2) Matricea $B = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}$ este o matrice pătratică de ordinul 3 cu

elemente numere raționale; deci $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$.

Observație Uneori pentru o matrice A de tipul (m, n) se mai folosește și notația:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

unde a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$) sînt elementele matricei.

Egalitatea matricelor Fie A și B două matrice de tipul (m, n) adică $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Cum A și B sînt funcții $A: M \times N \rightarrow \mathbb{C}$ și $B: M \times N \rightarrow \mathbb{C}$, matricele A și B sînt egale dacă și numai dacă sînt egale ca funcții. Deci $A = B$ dacă și numai dacă oricare ar fi $i \in M$ și $j \in N$, $A(i, j) = B(i, j)$.

Folosind notația (1) și presupunînd că

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

atunci $A = B$ dacă și numai dacă $a_{ij} = b_{ij}$, oricare ar fi $i = 1, 2, \dots, m$ și $j = 1, 2, \dots, n$.

2. Operații cu matrice. (1) *Adunarea matricelor.* Fie A și B două matrice de tipul (m, n) , adică $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Presupunem că

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ și } B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Definim matricea $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ ale cărei elemente sînt date de egalitățile

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, oricare ar fi $i = 1, 2, \dots, m$ și $j = 1, 2, \dots, n$. Matricea C se numește *suma dintre matricele A și B* și se notează $C = A + B$.

Operația prin care oricare două elemente A, B în $M_{m,n}(\mathbb{C})$ li se asociază suma lor se numește **adunare**.

Exemple 1) Dacă $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, atunci suma lor

$$\text{este } A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Dacă $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, atunci suma lor este

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Observație Are sens să vorbim de suma a două matrice numai dacă ele sunt de același tip.

Proprietățile adunării matricelor

1° **Adunarea este comutativă**, adică oricare ar fi $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ avem $A + B = B + A$.

Într-adevăr, dacă $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

atunci $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ și $B + A = (b_{ij} + a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Cum adunarea numerelor complexe este comutativă, avem

$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ oriunde ar fi $i = 1, 2, \dots, m$ și $j = 1, 2, \dots, n$. Deci $A + B = B + A$.

2° **Adunarea este asociativă**, adică oricare ar fi A, B și C din $M_{m,n}(\mathbb{C})$ avem $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Într-adevăr, dacă $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, atunci $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ și deci $(A + B) + C = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$. Analog

obținem că $A + (B + C) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$. Cum operația de adunare a

numerelor complexe este asociativă, avem $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$ pentru orice $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Deci $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3° **Element neutru** Matricea de tipul (m, n) ale cărei elemente sunt toate egale cu 0 se notează $0_{m,n}$ și se numește **matricea zero**. Matricea $0_{m,n}$ este element neutru pentru adunarea matricelor, în sensul că oricare ar fi $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ avem

$$A + 0_{m,n} = 0_{m,n} + A = A.$$

Verificarea acestei proprietăți este evidentă.

4° **Orice matrice are un opus**, adică oricare ar fi $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ există o matrice notată cu $-A$, astfel încât

$$A + (-A) = (-A) + A = 0_{m,n}.$$

Într-adevăr, dacă $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, atunci $-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ deoarece $A + (-A) = (a_{ij} + (-a_{ij}))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = (0_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = 0_{m,n}$. Conform proprietății 1° avem și $(-A) + A = 0_{m,n}$.

Exemplu. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; atunci $-A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Observație. Dacă A și B sînt din $M_{m,n}(\mathbb{C})$, suma $A + (-B)$ se notează simplu $A - B$ și se numește *diferența* dintre A și B . Operația prin care oricăror două matrice A și B li se asociază diferența lor se numește *scădere*.

De exemplu, dacă $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$,

atunci $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

② *Inmulțirea matricelor.* Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ o matrice de tipul (m, n) și $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}$ o matrice de tipul (n, p) . Definim matricea $C = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}}$ de tipul (m, p) ale cărei elemente sînt date de egalitățile:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \quad (1)$$

oricare ar fi $i = 1, 2, \dots, m$ și $k = 1, 2, \dots, p$.

Matricea C se numește *produsul* dintre A și B (în această ordine) și se notează $C = AB$. Operația prin care oricărui element $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și oricărui element $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ se asociază produsul lor se numește *înmulțire*.

Așadar, pentru a obține elementul din matricea AB de pe linia i și coloana k se face suma produselor elementelor corespunzătoare de pe linia i a matricei A cu cele de pe coloana k a matricei B . Mai pe scurt, se spune că „se înmulțesc linile cu coloanele”. Să explicităm mai pe larg modul cum se înmulțesc două matrice. Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}.$$

Dacă

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

este produsul lor, atunci

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}; \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2}; \\ &\dots \dots \dots \\ c_{1p} &= a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \dots + a_{1n}b_{np}; \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1}; \\ &\dots \dots \dots \\ c_{2p} &= a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + \dots + a_{2n}b_{np}; \\ &\dots \dots \dots \\ c_{mp} &= a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \dots + a_{mn}b_{np} \end{aligned}$$

Să facem câteva observații necesare înțelegerii înmulțirii matricelor

1) Trebuie să reținem că are sens să vorbim de produsul matricelor A cu matricea B (în această ordine) numai dacă numărul de coloane ale lui A este egal cu numărul de linii ale lui B .

2) Trebuie să subliniem că înmulțirea matricelor nu este în general o operație definită pe mulțimea tuturor matricelor, așa cum rezultă și din observația 1); ea este asemănătoare compunerii funcțiilor.

3) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci are sens să facem produsul $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și în acest caz înmulțirea matricelor, este o operație definită pe mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a matricelor. Trebuie să observăm că în cazul matricelor pătrate (de ordinul n) are sens să facem atât produsul AB cât și produsul BA .

4) Se pune întrebarea de ce definim produsul matricelor A și B înmulțind liniile lui A cu coloanele lui B . Această definiție, care la prima vedere pare arbitrară, are de fapt justificări profunde, care sînt greu de explicat la nivelul clasei a XI-a. Totuși, vom spune în mare cum stau lucrurile: fiecărei transformări geometrice i se asociază o matrice. Matricea asociată compunerii a două transformări geometrice este exact produsul matricelor asociate fiecărei transformări în parte.

Exemple. 1) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Cum A este de tipul $(2, 3)$ și B este de tipul $(3, 2)$, are sens să facem produsul lor, care va fi o matrice de tipul $(2, 2)$. Să presupunem că $C = AB$, deci C este

de forma $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, unde

$$c_{11} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = -1; \quad c_{12} = 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 6, \\ c_{21} = 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) = 3; \quad c_{22} = 0 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 = -3.$$

$$\text{Deci } AB = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

2) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Cum A este de tipul $(2, 2)$ și B este de tipul $(2, 3)$, are sens să facem produsul AB , care va fi o matrice de tipul $(2, 3)$. Să presupunem că produsul este de

forma $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$. Atunci

$$c_{11} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -1; \quad c_{12} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) = 1; \quad c_{13} = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1; \\ c_{21} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8; \quad c_{22} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) = -8; \\ c_{23} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$$

Deci

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Proprietățile înmulțirii matricelor

1° Înmulțirea este asociativă în sensul următor: dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ și $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, atunci are loc egalitatea

$$(AB)C = A(BC).$$

Să observăm mai întâi că are sens să facem produsele $(AB)C$ și $A(BC)$

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$; $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}$; $C = (c_{kl})_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq l \leq q}}$.

Să notăm $AB = (d_{ih})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq h \leq p}}$ care este o matrice de tipul (m, p) și $(AB)C = (e_{il})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq l \leq q}}$,

care este o matrice de tipul (m, q) . Atunci $d_{ih} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jh}$ și $e_{il} = \sum_{k=1}^p d_{ik}c_{kl}$. Deci

$$e_{il} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jh} \right) c_{kl} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jh}c_{kl}$$

Fie $BC = (d'_{jl})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq l \leq q}}$ și $A(BC) = (e'_{il})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq l \leq q}}$.

Atunci $d'_{jl} = \sum_{k=1}^p b_{jk}c_{kl}$ și $e'_{il} = \sum_{j=1}^n a_{ij}d'_{jl}$.

$$\text{Deci } e'_{il} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^p b_{jk}c_{kl} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ij}b_{jk}c_{kl} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

Să observăm că $e_{il} = e'_{il}$, oricare ar fi $i = 1, 2, \dots, m$, $l = 1, 2, \dots, q$ și prin urmare $(AB)C = A(BC)$.

2° *Înmulțirea este distributivă la stînga față de adunare în sensul următor:* dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, atunci

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Într-adevăr, dacă $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}$ și $C = (c_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}$, atunci $B + C = (b_{jk} + c_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}$. Dacă notăm $A(B + C)$ cu D , unde $D = (d_{ih})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq h \leq p}}$,

atunci $d_{ih} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(b_{jh} + c_{jh})$.

Dacă notăm AB cu D' și AC cu D'' , unde $D' = (d'_{ih})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq h \leq p}}$ și $D'' = (d''_{ih})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq h \leq p}}$,

atunci $d'_{ih} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jh}$ și $d''_{ih} = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jh}$.

Rezultă că $AB + AC = D' + D'' = (d'_{ih} + d''_{ih})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq h \leq p}}$.

Deoarece $d'_{ih} + d''_{ih} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jh} + \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jh} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(b_{jh} + c_{jh}) = d_{ih}$, rezultă că

$$A(B + C) = AB + AC.$$

3° *Înmulțirea este distributivă la dreapta față de adunare în sensul următor:* dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ atunci

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Demonstrația acestei proprietăți se face exact ca cea de la 2°

În cazul matricelor pătratice are loc următoarea proprietate importantă:

3° În mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ există un element neutru față de înmulțire. Matricea pătratică de ordinul n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

care are pe diagonala principală numerele 1 iar restul elementelor sînt 0 are proprietatea că oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$AI_n = I_n A = A.$$

Într-adevăr, dacă introducem notația,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j, \\ 0 & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

(δ_{ij} se numește simbolul lui Kronecker),

atunci $I_n = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ o matrice pătratică de ordinul n . Dacă

notăm AI_n cu $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, atunci $b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}$. Deci $AI_n = A$. În mod analog se arată că $I_n A = A$.

Observație. Am văzut că dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci are sens să facem produsele AB și BA . În general, cele două matrice sînt distincte, adică $AB \neq BA$. Într-adevăr, fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, atunci $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se observă că $AB \neq BA$.

③ **Înmulțirea cu scalari a matricelor.** Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ o matrice de tipul (m, n) și a un număr complex. Definim matricea $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ de tipul (m, n) ale cărei elemente sînt date de egalitățile: $b_{ij} = aa_{ij}$ oricare ar fi $i = 1, 2, \dots, m$ și $j = 1, 2, \dots, n$. Matricea B se numește *produsul dintre numărul a (sau scalarul a) și matricea A* și se notează $B = aA$. Operația prin care oricărui element $a \in \mathbb{C}$ și oricărui element $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ li se asociază produsul aA se numește *înmulțirea cu scalari (la stînga)*.

Observații. 1) Se numește *înmulțirea cu scalari la stînga* deoarece produsul dintre $a \in \mathbb{C}$ și matricea A se notează aA , adică a se scrie la stînga lui A .
2) Observăm că dacă $a \in \mathbb{C}$ și A este o matrice de tipul (m, n) , atunci aA este de tipul (m, n) .

Exemplu. Fie $a = 3$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ care este o matrice de tipul $(2, 3)$. Avem $aA = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

Proprietățile înmulțirii cu scalari a matricelor

1° Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci $1 \cdot A = A$.

2° Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $a, b \in \mathbb{C}$, atunci $(a + b)A = aA + bA$.

3° Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $a, b \in \mathbb{C}$, atunci $(ab)A = a(bA)$.

4° Dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $a \in \mathbb{C}$, atunci $a(A + B) = aA + aB$.

5° Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ și $a \in \mathbb{C}$, atunci $a(AB) = (aA)B = A(aB)$.

Cele cinci proprietăți se demonstrează fără nici o dificultate; verificarea lor o lăsăm ca exercițiu.

③ **Transpusa unei matrice.** Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ o matrice de tipul (m, n) .

Matricea ${}^tA = ({}^ta_{kl})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq m}}$ unde ${}^ta_{kl} = a_{lk}$ pentru orice $k = 1, 2, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, m$ se numește **transpusa matricei A** .

Se observă că tA este o matrice de tipul (n, m) și se obține din A luând liniile, respectiv coloanele, lui A drept coloane, respectiv linii, pentru tA (mai precis prima linie a matricei tA este prima coloană a matricei A , a doua linie a lui tA este a doua coloană a lui A ș.a.m.d.)

În particular, dacă A este o matrice patratică de ordinul n , atunci transpusa sa tA este de asemenea o matrice patratică de ordinul n . Dacă $k = l$ atunci ${}^ta_{kk} = a_{kk}$ și deci diagonală principală a matricei tA este aceeași cu diagonală principală a matricei A .

Exemple. 1) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, matricea A este de tipul $(2, 3)$. Transpusa

acestei matrice este ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

2) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ atunci transpusa tA este matricea ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Următoarele proprietăți se verifică fără nici o dificultate. Demonstrarea lor o lășăm ca exercițiu:

1° Dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$$

2° Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, atunci ${}^t(AB) = {}^tB({}^tA)$

3° Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $a \in \mathbb{C}$, atunci

$${}^t(aA) = a({}^tA).$$

Exerciții

1. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 7 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 6 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A + B$

2. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze

a) $A + B$, AB și BA

b) A^2 , B^2 și $A^2 - B^2$.

c) $AB - BA$.

3. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și $AB = BA$ să se arate că are loc egalitatea
 $A^k B^k = (A + B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + A^{k-3}B^2 + \dots + AB^{k-2} + B^{k-1})$,
 oricare ar fi $k > 0$.

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ Să se determine toate matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ astfel
 încât: $AX = XA$.

5. Fie $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n (n \geq 1)$.

6. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci A verifică ecuația
 $x^2 - (a + d)x + (ad - bc)I_2 = 0$.

7. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ Dacă $f(x) = x^3 + 3x + I_3$ să se calculeze $f(A)$

8. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, să se determine $A^n (n \geq 1)$

9. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ să se arate că egalitatea $AB - BA = I_n$ este imposibilă
 Să se determine $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât:

a) $A^3 = I_2$,

b) $A^2 = 0$.

10. Să se determine x, y, z, u, v, w , dacă se cunoaște că avem egalitatea:

$$2 \begin{pmatrix} x & -2y & 3z \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ u & v & -3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 18 \\ 3 & -5 & -11 \end{pmatrix}.$$

11. Să se determine matricea X din ecuația:

$$3X + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -9 & 8 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Să se determine x și y , dacă avem:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5y & 3x & -10 \\ -1 & 5 & 4 & 6y \\ 13 & 5 & 4y & -1 \end{pmatrix}.$$

13) Să se calculeze suma:

$$\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 & k^3 \\ -1 & 2 & 3 & k(k+1) \end{pmatrix}.$$

14. Dacă ω este o rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, să se calculeze suma:

$$\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \omega^k & \omega^{2k} & \omega^{3k} \\ \omega^{2k} & \omega^k & \omega^{3k} \end{pmatrix}.$$

16. Să se determine valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care avem:

$$\begin{pmatrix} 2 \sin^2 x & \sin^2 2x \\ \operatorname{tg} x & \cos 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

17. Să se rezolve ecuația:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

X fiind o matrice pătrată de ordinul doi cu elemente reale.

18. Se consideră $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Se cere A^n .

19. Fie A o matrice pătrată de ordinul doi, $\operatorname{tr} A = 12$, $\det A = 0$, atunci suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A este egală cu zero.

20. Să se arate că există o unitate de matrice $I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ care verifică eguitatea $A^2 = I$, și $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

21. Fie \mathcal{M} mulțimea matricelor pătrate de ordinul doi de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Definim funcția

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}, f(a + ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Să se arate că: a) f este bijectivă,

b) oricare ar fi $z, z' \in \mathbb{C}$ au loc egalitățile

$$\begin{aligned} f(z + z') &= f(z) + f(z'), \\ f(zz') &= f(z)f(z') \end{aligned}$$

22. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ astfel încât $0 \leq a^2 + b^2 < 1$.

a) Să se arate că matricea A^n este de forma $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$

b) Să se demonstreze că șirurile a_n și b_n sunt convergente și au limita zero.

23. Să notăm cu \mathcal{M} mulțimea tuturor matricelor de tipul (m, n) în care toate elementele sînt numerele $+1$ sau -1 și astfel nu e produsul matricelor din fiecare linie și din fiecare coloană să fie -1 . Să se calculeze numărul elementelor mulțimii \mathcal{M} .

24. Să se calculeze suma

$$\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \cos^2 k\alpha & \sin^2 k\alpha \\ \cos^2 k\alpha & \sin^2 k\alpha \end{pmatrix}.$$

CAPITOLUL III

Determinanți

1. **Determinanți de ordinul 2 și 3.** Fie sistemul de două ecuații liniare cu două necunoscute

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1)$$

Să notăm cu A matricea coeficienților sistemului (1), adică

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

A este o matrice pătratică de ordinul doi.

Rezolvarea sistemului (1) este bine cunoscută. Aplicând metoda reducerii obținem sistemul echivalent

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{cases}$$

Presupunem că $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$; atunci soluția sistemului (1) este

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (2)$$

Se observă că numitorul din egalitățile (2) se exprimă simplu: el este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală a matricei A din care se scade produsul elementelor de pe diagonala secundară a matricei A .

Acest număr îl notăm cu $\det A$ și îl numim *determinantul matricei A* , sau încă, *determinant de ordinul doi* (deoarece matricea A este de ordinul doi). Acest număr se notează de obicei și astfel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Deci avem egalitatea

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Produsele $a_{11}a_{22}$, $a_{12}a_{21}$ se numesc *termenii determinantului de ordinul doi*.

Exemplu. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Avem $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = -3$.

Să revenim la formulele (2) care dau soluțiile sistemului (1). Se observă că numărătorul formulei care dă valoarea lui x_1 este tot un determinant de ordinul doi, și anume determinantul matricei

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Această matrice se obține din A înlocuind prima coloană a matricei A cu coloana formată din elementele b_1 și b_2 . Analog, numărătorul formulei care dă valoarea lui x_2 este un determinant de ordinul doi, și anume determinantul matricei

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}.$$

Deci formulele (2) se pot rescrie sub forma

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (3)$$

Formulele (3) poartă denumirea de *formulele lui Cramer*.

Să considerăm acum un sistem de trei ecuații liniare cu trei necunoscute.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (4)$$

și să notăm cu A matricea coeficienților, adică

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Rezolvarea sistemului (4) o vom face prin metoda reducerii. Dacă înmulțim prima ecuație din (4) cu a_{23} și a doua cu $-a_{13}$ și le adunăm, obținem ecuația

$$(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})x_1 + (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})x_2 = b_1a_{23} - b_2a_{13}. \quad (5)$$

Analog, înmulțind prima ecuație cu a_{33} și a treia cu $-a_{13}$ și apoi adunând, obținem ecuația

$$(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})x_1 + (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})x_2 = b_1a_{33} - b_3a_{13}. \quad (6)$$

Cu ecuațiile (5) și (6) formăm sistemul

$$\begin{cases} (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})x_1 + (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})x_2 = b_1a_{23} - b_2a_{13}, \\ (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})x_1 + (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})x_2 = b_1a_{33} - b_3a_{13}, \end{cases} \quad (7)$$

care este un sistem de două ecuații cu două necunoscute. Dacă în sistemul (7) înmulțim prima ecuație cu $a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}$ și a doua cu $-(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$ și apoi le adunăm obținem

$$\begin{aligned} [(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) - (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})]x_1 = \\ = (b_1a_{23} - b_2a_{13})(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) - (b_1a_{33} - b_3a_{13})(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}). \end{aligned}$$

Desfăcînd parantezele, avem

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32} \quad (8)$$

Numărul care este coeficientul lui x_1 în ecuația (8) îl notăm cu $\det A$ și îl numim *determinantul matricei A*, sau încă, *determinant de ordinul trei* (deoarece matricea A este o matrice de ordinul trei). Acest număr se notează de obicei și astfel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Deci avem egalitatea

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (9)$$

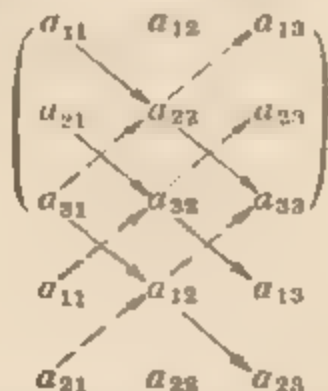
Din (9) se vede că formula care dă valoarea determinantului de ordinul trei are șase termeni, numiți *termenii determinantului de ordinul trei*.

Exemplu. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aplicînd formula (9), avem $\det A = (-1) \cdot 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 3 + 24 - 4 - 12 - 2 - 24 = -25$.

Observăm că formula (9) care dă valoarea determinantului de ordinul trei este greu de ținut minte. Pentru aceasta se stabilește o regulă simplă pentru calculul determinantului de ordinul trei. Se formează următorul tablou, se scriu mai întîi liniile matricei A și apoi dedesubt se scrie mai întîi prima linie și apoi a doua linie a matricei A . În felul acesta se obține un tablou cu cinci linii



Termenii cu semnul (+) în dezvoltarea determinantului de ordinul trei sînt cei care se obțin prin înmulțirea elementelor în sensul săgeților continue, adică: $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{21}a_{32}a_{13}$, $a_{31}a_{12}a_{23}$ iar termenii cu semnul (-) sînt cei care se obțin prin înmulțirea elementelor în sensul săgeților punctate, adică: $a_{31}a_{22}a_{13}$, $a_{11}a_{32}a_{23}$, $a_{21}a_{12}a_{33}$.

Regula expusă mai înainte după care se face dezvoltarea determinantului de ordinul trei se numește *regula lui Sarrus*.

Exemplu. Să considerăm matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Formăm tabloul pentru aplicarea regulii lui Sarrus

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Deci } \det A = (-1) \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 0 = 4 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 3 = -3 + 6 - 4 = -1.$$

Se ne reîntoarcem la ecuația (8) care dă valoarea lui x_1 . Se observă că membrul din dreapta tot un determinant de ordinul trei și ca une este determinantul de ordinul trei care se obține din matricea A , matricea coeficienților, înlocuind prima coloană cu coloana termenilor liberi din sistemul (7). În formula (8) se poate scrie astfel

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

În mod similar, înlocuind pe rând fiecare coloană din (8), avem și ecuațiile care dau valorile lui x_2 și x_3 :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Deci

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x$$

având valorile lui x_1 , x_2 și x_3 sunt

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad (10)$$

Formulele (10) se numesc, de asemenea, *formulele lui Cramer* de rezolvare a sistemelor de trei ecuații liniare cu trei necunoscute.

2 Definiția determinantului de ordinul n . În cele ce urmează vom defini să dăm definiția determinantului unei matrice pătratice de ordinul n în așa fel încît pentru $n = 2$ și $n = 3$ să obținem determinantii de ordinul 2 și 3.

În definirea determinantilor de ordinul 2 și 3 am utilizat rezolvarea sistemelor de ecuații liniare. Acest procedeu este greu de folosit pentru cazul general, datorita calculelor laborioase care intervin. Noi vom utiliza altă metodă: analizînd formulele care dau determinantii de ordinul 2 și 3, vom deduce o lege generală prin care vom defini determinantul de ordinul n . În capitolul următor vom arăta că formula determinantului de ordinul n , așa cum o dăm mai jos, ne va permite obținerea unor formule de tip Cramer pentru rezolvarea sistemelor de n ecuații liniare cu n necunoscute.

Să reamintim formulele determinantilor de ordinul 2 și 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Constatam că termenii determinantilor de ordinul 2 și 3 sînt produse de elemente aparținînd la linii și coloane distincte. În plus, orice astfel de produs (adică din elemente aparținînd la linii și coloane distincte) este termen în formula determinantului respectiv.

Să considerăm acum o matrice pătratică de ordinul n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Vom forma toate produsele posibile de n elemente aparținînd la linii și coloane distincte. Un astfel de produs este de forma

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}, \quad (1)$$

unde i_1, i_2, \dots, i_n sînt toate elementele mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$, exact o dată, în altă ordine. Înseamnă că putem considera permutarea de gradul n

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

și deci produsul (1) se scrie

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} = a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

Numărul total al produselor de forma (1) este egal cu numărul tuturor permutărilor de grad n , deci $n!$.

Ținând cont de formulele determinantilor de ordinul 2 și 3, în mod natural formula determinantului de ordinul n trebuie să conțină toate produsele

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

unde σ parcurge toate permutările lui S_n . Mai rămâne de aflat semnul cu care apare produsul $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$.

Să revenim din nou la formulele determinantilor de ordinul 2 și 3. Să luăm de exemplu din formula determinantului de ordinul 3 termenii cu semnul (+): $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$. Se observă că permutările asociate acestor termeni:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sînt permutări pare, deci semnul lor este +1.

Dacă luăm acum termenii cu semnul (-): $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, permutările asociate acestor termeni:

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sînt permutări impare, deci au signatura (semnul) -1.

Aceste observații ne sugerează că în definiția determinantului de ordinul n , produsul $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$ trebuie să aibă semnul (+) sau (-) după cum permutarea σ are signatura (semnul) +1 sau -1.

Acum sîntem în măsură să definim determinantul de ordinul n .

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \quad (2)$$

Unor permutări de S_n (și n este arbitrar) le corespunde semnul +1 sau -1, în funcție de numărul de transmutări necesare pentru a transforma permutarea în identitate.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Produsul $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$ se numește *termen al determinantului de ordinul n* .

Se obișnuiește să se spună despre elementele, liniile și coloanele matricei A că sînt elementele, liniile, respectiv coloanele determinantului $\det A$. Uneori numărul $\det A$ se mai notează prescurtat și $|A|$ sau $|a_{ij}|_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

Observații 1) Noțiunea de determinant al unei matrice are sens numai pentru matrice pătratică. Este deosebită între matrice și determinantul său: matricea este o funcție, iar determinantul matricei este un număr.

2) În formula determinantului unei matrice există $n!$ termeni dintre care $\frac{n!}{2}$ au semnul (+), iar $\frac{n!}{2}$ au semnul (-).

- 3) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectiv $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, respectiv $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$), atunci $\det A$ este un număr real (respectiv rațional, respectiv întreg)
- 4) Definiția determinantului se aplică și matricelor de ordinul 1, cînd $A = (a_{11})$. În acest caz $\det A = a_{11}$.
- 5) Așa cum a fost definit determinantul de ordinul n , pentru $n = 2$ și $n = 3$ obținem determinantul de ordinul 2 respectiv 3.

3. Proprietățile determinantilor. Formula determinantului de ordinul 2 este simplă, formula determinantului de ordinul 3 este deja complicată. Aici avem avantajul că avem o regulă simplă - regula lui Sarrus, care ne permite să calculăm destul de ușor un determinant de ordinul 3. Dacă în schimb avem de calculat determinanți de ordinul $n \geq 4$, formula prin care este definit determinantul de ordinul n , în general este aproape imposibil de aplicat, datorită calculelor laborioase ce apar. De exemplu, pentru un determinant de ordinul 4 avem $4! = 24$ termeni în formula sa, pentru $n = 5$ avem $5! = 120$ termeni de calculat, iar pentru $n = 10$ avem $10! = 3\,628\,800$ termeni de calculat. Din aceste motive se caută să se scoată în evidență o serie de proprietăți ale determinantilor de ordinul n , care simplifică de multe ori calculul determinantilor.

Proprietate 1. Dacă $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ este o matrice cu elemente reale sau complexe, atunci

$$\det A = \det {}^tA, \text{ unde } {}^tA = (a_{ji})_{1 \leq j, i \leq n} \text{ este matricea transpusă a lui } A.$$

Demonstrație. Fie $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ și ${}^tA = (a_{ji})_{1 \leq j, i \leq n}$ matricea transpusă a lui A .

Deci $a_{ij} = a_{ji}$, oriunde ar fi $i = 1, 2, \dots, n$ și $j = 1, 2, \dots, n$. Avem

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \quad (1)$$

$$\det {}^tA = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}. \quad (2)$$

Dacă notăm $\sigma(i) = k_i$, atunci $i = \sigma^{-1}(k_i)$ și deci produsul

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} &= \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(k_1)k_1} a_{\sigma^{-1}(k_2)k_2} \cdots a_{\sigma^{-1}(k_n)k_n} = \\ &= \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(k_1)k_1} a_{\sigma^{-1}(k_2)k_2} \cdots a_{\sigma^{-1}(k_n)k_n} \end{aligned}$$

deoarece $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$. Cum numerele k_1, k_2, \dots, k_n sînt numerele $1, 2, \dots, n$ eventual în altă ordine, iar înmulțirea numerelor este comutativă, atunci

$$\varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

și deci orice termen din suma (1) se regăsește ca termen în suma (2) și invers. Deci $\det A = \det {}^tA$.

Observații. 1) Proprietatea 1 se scrie și astfel

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2) Proprietatea 1 arată că ori de cîte ori avem o proprietate adevărată referitoare la linile unui determinant, aceeași proprietate este adevărată și pentru coloanele determinantului.

Proprietate 2 Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sînt nule, atunci determinantul matricei este nul.

Demonstrație. Să presupunem că toate elementele de pe linia i sînt nule. Cum fiecare termen al determinantului este un produs de elemente printre care se găsește și un element de pe linia i , atunci acest termen este zero. Deci determinantul este zero.

Exemplu. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Deoarece linia a 2-a a matricei A are toate elementele nule $\det A = 0$.

Proprietate 3 Dacă într-o matrice schimbăm două linii (sau coloane) între ele obținem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei inițiale.

Demonstrație. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ \\ (j) \end{matrix}$$

Prin schimbarea liniilor i și j între ele obținem matricea

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ \\ (j) \end{matrix}$$

Avem $\det A' = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)}$. Să considerăm transpoziția $\tau = (ij)$ deci $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ și $\tau(k) = k$ dacă $k \neq i, j$. Atunci

$$\begin{aligned} \det A' &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma\tau(1)} a_{2\sigma\tau(2)} \dots a_{j\sigma\tau(j)} \dots a_{i\sigma\tau(i)} \dots a_{n\sigma\tau(n)}. \end{aligned}$$

Cum $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$, avem

$$\det A' = - \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma\tau) a_{1\sigma\tau(1)} \dots a_{i\sigma\tau(i)} \dots a_{j\sigma\tau(j)} \dots a_{n\sigma\tau(n)}.$$

Cînd σ parcurge toate permutările lui S_n atunci și $\sigma\tau$ parcurge toate permutările lui S_n ; deci dacă notăm $\sigma\tau = \sigma'$ avem

$$\det A' = - \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') a_{1\sigma'(1)} a_{2\sigma'(2)} \dots a_{n\sigma'(n)}$$

și deci $\det A' = -\det A$.

Exemplu Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dacă schimbăm liniile 1 și 2 între ele obținem matricea $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Conform proprietății 3 avem $\det A' = -\det A$, fapt ce se poate verifica și folosind regula lui Sarrus.

Proprietatea 4 Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice, ..., $\det A = 0$.
determinantul său este nul.

Demonstrație Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ o matrice pătratică de ordinul n în care

liniile i și j sînt identice. Aceasta înseamnă că $a_{ik} = a_{jk}$ pentru orice $k = 1, 2, \dots, n$. Dacă schimbăm liniile i și j între ele obținem o matrice A' egală cu A . Aplicînd proprietatea 3, avem că $\det A' = -\det A$. Cum $A = A'$ avem $\det A = -\det A'$ și atunci $\det A = -\det A$; deci $\det A = 0$.

Exemplu Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

care are două coloane identice (coloana 1 și coloana 3). Deci conform proprietății 4 avem $\det A = 0$.

Proprietatea 5 Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrice sînt înmulțite cu un număr $\alpha \neq 0$ obținem o matrice A' a cărei determinant este egal cu α înmulțit cu determinantul matricei inițiale.

Demonstrație Fie matricea $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ și fie $A' = (a'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ matricea care se obține din A prin înmulțirea liniei i cu numărul α . Deci avem $a'_{ij} = \alpha a_{ij}$ pentru $i = j$ și $j = 1, 2, \dots, n$ și $a'_{ij} = a_{ij}$ oricare ar fi $j = 1, 2, \dots, n$. Deci

$$\begin{aligned} \det A' &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a'_{1\sigma(1)} a'_{2\sigma(2)} \dots a'_{n\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots (\alpha a_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} = \\ &= \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = \alpha \det A \end{aligned}$$

Deci $\det A' = \alpha \det A$.

Observație Proprietatea 5 se transcrie și astfel (pentru linii)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemplu Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dacă înmulțim linia a 2-a cu numărul $\alpha = 1/2$ obținem matricea

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicând proprietatea 5 avem $\det A' = \frac{1}{2} \det A$, lucru ce se poate verifica și direct aplicând regula lui Sarrus. Avem $\det A = 10$ și $\det A' = 5$.

Demonstrație Fie matricea $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ în care liniile i și j sînt proporționale,

adică există un număr α astfel încît $a_{ji} = \alpha a_{ij}$ oricare ar fi $i = 1, 2, \dots, n$. Aplicînd proprietatea 5 rezultă că $\det A$ este produsul dintre numărul α și determinantul unei matrice care are două linii egale. Aplicînd proprietatea 4 rezultă că $\det A$ este zero.

Exemplu. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & 7 & -9 & 1 \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 5 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Cum linia 1 și linia a 3-a a matricei A sînt proporționale aplicînd proprietatea 6 avem $\det A = 0$.

$$a_{ij} = a_{ij} + a'_{ij}, \text{ oricare ar fi } j = 1, 2, \dots, n.$$

$$a_{ij}, j = 1, 2, \dots, n, \text{ atunci}$$

$$\det A = \det A' + \det A''.$$

Demonstrație. Avem:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots (a'_{i\sigma(i)} + \\ &+ a''_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + \\ &+ \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a''_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = \det A' + \det A''. \end{aligned}$$

Observații 1) Proprietatea 7 se transcrie și astfel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \dots & a'_{in} + a''_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2) Folosind proprietatea 1 obținem pentru proprietatea 7 și varianta pe coloane, adică egalitatea.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \tilde{a}_{1j} + \tilde{a}_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \tilde{a}_{2j} + \tilde{a}_{2j} & & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & \tilde{a}_{nj} + \tilde{a}_{nj} & & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \tilde{a}_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \tilde{a}_{2j} & & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \tilde{a}_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \tilde{a}_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ o matrice patratică. Vom spune că linia i a matricei A este o *combinație liniară* de celelalte linii, dacă există numerele

$\alpha_j, j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$, astfel încît

$$a_{ij} = \alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \dots + \alpha_{i-1} a_{i-1,j} + \alpha_{i+1} a_{i+1,j} + \dots + \alpha_n a_{nj},$$

oricare ar fi $j = 1, 2, \dots, n$. Asupra numerelor α_j nu se pune nici o condiție, în sensul că unele dintre ele pot fi zero. Analog se poate defini ce înseamnă că o coloană j a matricei A este combinație liniară de celelalte coloane.

Exemplu. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & -10 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Linia a 2-a a matricei A este combinație liniară de celelalte două linii. Într-adevăr, dacă considerăm numerele $\alpha_1 = -1$ și $\alpha_3 = 1$ se observă că:

$$3 = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-2); \quad 3 = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 5, \quad -10 = (-1) \cdot 4 + 1 \cdot (-6)$$

Proprietatea 3. Dacă o linie (sau o coloană) a unei matrice este o combinație liniară de celelalte linii (sau coloane), atunci **determinantul matricei este zero.**

Demonstrație. Presupunem că linia i a matricei A este o combinație liniară de celelalte linii. Utilizînd proprietatea 7, determinantul matricei A este o sumă de determinanți care au două linii proporționale, deci, după proprietatea 6, sînt zero toți acești determinanți. Prin urmare și determinantul matricei A este zero.

Exemplu. Să considerăm din nou matricea de mai sus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & -10 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Cum linia a 2-a este o combinație liniară de celelalte două linii, rezultă că $\det A = 0$.

Proprietatea 4. Dacă o linie (sau o coloană) a unei matrice este egală cu altă linie (sau coloană) din aceeași matrice, atunci **determinantul matricei este zero.**

Demonstrație. Să presupunem că $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ și că la linia i adunăm ele-

mentele liniei j înmulțite cu numărul α . Obținem astfel o matrice A' care are aceleași linii ca matricea A , în afară de linia i , ale cărei elemente sînt

$$a_{ir} + \alpha a_{jr}, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Folosind proprietatea 7, determinantul matricei A' este suma a doi determinanți dintre care unul este determinantul matricei A și al doilea determinant este determinantul unei matrice care are două linii proporționale. Conform proprietății 6 acest al doilea determinant este nul. Prin urmare, $\det A' = \det A$.

Observație Proprietatea 9 se transcrie astfel (pentru linii):

$$\begin{array}{l} (i) \\ (j) \end{array} \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} & a_{i2} + \alpha a_{j2} & \dots & a_{in} + \alpha a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right|$$

Observație. Se poate constata că proprietatea 8 extinde proprietatea 6 și că proprietățile 4 și 2 sînt cazuri particulare ale proprietății 6. Dar le-am dat datorită importanței lor și pentru o reținere mai bună.

Aplicație Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ o matrice pătratică. Matricea A se numește *antisimetrică* dacă $a_{ij} = -a_{ji}$ oricare ar fi $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$. Dacă $i = j$ obținem că $a_{ii} = -a_{ii}$ și deci $a_{ii} = 0$. Rezultă că elementele de pe diagonala principală a unei matrice antisimetrice sînt toate zero.

Să arătăm că dacă A este antisimetrică și n este număr impar, atunci $\det A = 0$. Matricea A se poate scrie astfel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Înmulțind fiecare linie cu -1 , obținem transpusa matricei A . Aplicînd proprietatea 1 și proprietatea 5 rezultă că

$$\det A = (-1)^n \det A.$$

Cum n este impar, atunci

$$\det A = -\det A$$

și deci

$$\det A = 0.$$

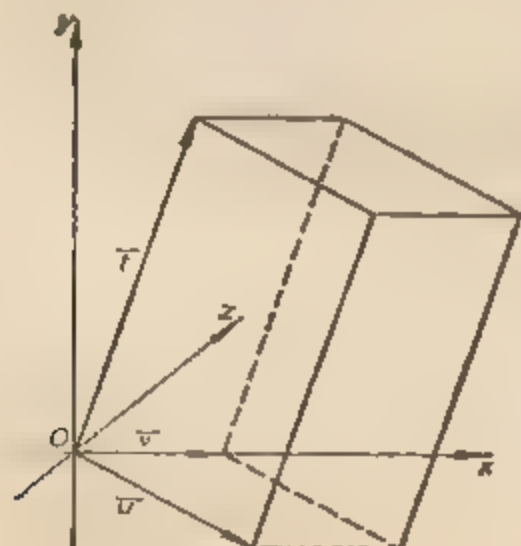


Fig. 1

4. Interpretarea geometrică a determinantului de ordinul 3. Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$ trei vectori necoplanari cu originea în punctul O (fig. 1). Volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$ este egal cu valoarea absolută a expresiei $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{t}$ numită produs mixt.

Fie u_x, u_y, u_z — componentele scalare ale vectorului \vec{u} ,
 v_x, v_y, v_z — componentele scalare ale vectorului \vec{v} ,
 t_x, t_y, t_z — componentele scalare ale vectorului \vec{t} .
 Avem

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y) \vec{a} + (u_z v_x - u_x v_z) \vec{b} + (u_x v_y - u_y v_x) \vec{c}$$

și deci

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{t} = t_x(u_y v_z - u_z v_y) + t_y(u_z v_x - u_x v_z) + t_z(u_x v_y - u_y v_x).$$

Ținând cont de formula determinantului de ordinul 3, putem scrie:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{t} = \begin{vmatrix} t_x & t_y & t_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Deci volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori este egal cu valoarea absolută a determinantului

$$\begin{vmatrix} t_x & t_y & t_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Ceea ce este interesant, este că fiecare proprietate a determinanților are o interpretare geometrică. Să presupunem că unul dintre vectorii \vec{u} , \vec{v} sau \vec{t} este multiplicat cu un număr α ; atunci volumul paralelipipedului se multiplică cu $|\alpha|$. Această proprietate este corespondentul proprietății 5 de la determinanți. Sau, să presupunem că există un număr α astfel încît $\vec{v} = \alpha \vec{u}$.

În acest caz vectorii \vec{u} și \vec{v} se suprapun și deci volumul paralelipipedului este zero, ceea ce rezultă pe de altă parte folosind proprietatea 6.

Dacă unul dintre vectorii \vec{u} , \vec{v} , \vec{t} este zero, atunci volumul paralelipipedului este zero. Această proprietate geometrică este corespondentul proprietății 2 a determinanților.

Căutați să interpretați geometric și celelalte proprietăți ale determinanților.

5. Calculul determinanților. În cele ce urmează vom da un procedeu prin care calculul unui determinant de ordinul n se reduce la calculul unui anumit număr de determinanți de ordinul $n - 1$.

Fie

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

un determinant de ordinul n . Determinantul de ordinul $n - 1$ care se obține suprimînd linia i și coloana j din determinantul d se numește *minorul elementului* a_{ij} și se notează cu d_{ij} . Numărul

$$[\delta_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}]$$

se numește *complementul algebric* al elementului a_{ij} în determinantul d .

Evident, unui determinant de ordinul n i se pot asocia n^2 minori de ordinul $n - 1$ și respectiv n^2 complementi algebrici.

Exemplu. Fie determinantul de ordinul 3

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Minorii elementelor din d sînt în număr de 9. Aceștia sînt următorii:

$$\begin{aligned} d_{11} &= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -19; & d_{12} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{5}{2}; & d_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2; \\ d_{21} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -13; & d_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5; & d_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4; \\ d_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5; & d_{32} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0; & d_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -3 \end{vmatrix} = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Complementii algebrici ai elementelor din d sînt:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= (-1)^{1+1}d_{11} = -19; & \delta_{12} &= (-1)^{1+2}d_{12} = -\frac{5}{2}; & \delta_{13} &= (-1)^{1+3}d_{13} = 2; \\ \delta_{21} &= (-1)^{2+1}d_{21} = 13; & \delta_{22} &= (-1)^{2+2}d_{22} = 5; & \delta_{23} &= (-1)^{2+3}d_{23} = -4; \\ \delta_{31} &= (-1)^{3+1}d_{31} = 5; & \delta_{32} &= (-1)^{3+2}d_{32} = 0; & \delta_{33} &= (-1)^{3+3}d_{33} = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Teoremă 1. Fie d un determinant de ordinul n și fie a_{ij} elementele sale, $1 \leq i, j \leq n$.

orice $1 \leq i \leq n$, are loc egalitatea: (1)

$$d = a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2} + \dots + a_{in}\delta_{in}.$$

Egalitatea (1) poartă denumirea de dezvoltarea determinantului d după linia i .

Demonstrație. Vom nota cu S suma

$$S = a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2} + \dots + a_{in}\delta_{in}. \quad (2)$$

Să considerăm termenul $a_{ij}\delta_{ij} = (-1)^{i+j}a_{ij}d_{ij}$ din suma (2). Să presupunem mai întâi că $i = j = 1$. În acest caz un termen oarecare din dezvoltarea determinantului d_{11} de ordinul $n - 1$ este de forma $a_{2k_2}a_{3k_3} \dots a_{nk_n}$ unde k_2, k_3, \dots, k_n sînt numerele $2, 3, \dots, n$, eventual în altă ordine. Rezultă că termenul $a_{11}a_{2k_2}a_{3k_3} \dots a_{nk_n}$ este un termen al determinantului d . Semnul termenului $a_{2k_2}a_{3k_3} \dots a_{nk_n}$ provenit din dezvoltarea determinantului d_{11} este egal cu $(-1)^l$ unde l este numărul de inversiuni ale permutării

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{pmatrix}.$$

Deci semnul termenului $a_{11}a_{2k_2}a_{3k_3} \dots a_{nk_n}$ provenit din produsul $a_{11}\delta_{11}$ este $(-1)^{1+1}(-1)^l = (-1)^l$.

Pe de altă parte, semnul termenului $a_{11}a_{2k_2}a_{3k_3} \dots a_{nk_n}$ în dezvoltarea determinantului d este egal cu $(-1)^r$ unde r este numărul de inversiuni ale permutării

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{pmatrix}.$$

Cum $k_1 > 1, k_2 > 1, \dots, k_n > 1$, permutările σ și τ au același număr de inversiuni; deci $r = 1$. Prin urmare termenul $a_{11}a_{2k_2}a_{3k_3} \dots a_{nk_n}$, provenit din produsul $a_{11}\delta_{11}$, are același semn cu cel provenit din dezvoltarea determinantului d .

Trecem la cazul general. Vom proceda în modul următor: vom schimba liniile și coloanele în așa fel încât elementul a_{ij} să vină în locul elementului a_{11} și minorul d_{ij} să rămână neschimbat. În acest fel linia i și coloana j devin linia 1 respectiv coloana 1; linia 1 devine linia 2, linia 2 devine linia 3, ..., linia $i-1$ devine linia i ; coloana 1 devine coloana 2, coloana 2 devine coloana 3, ..., coloana $j-1$ devine coloana j .

Determinantul obținut prin aceste schimbări îl notăm cu d' . Aplicând proprietatea 3 a determinantilor, avem

$$d = (-1)^{i+j}d'. \quad (3)$$

În plus $d'_{11} = d_{ij}$. Dacă $a_{1k_1}a_{2k_2} \dots a_{i-1,k_{i-1}}a_{i+1,k_{i+1}} \dots a_{nk_n}$ este un termen oarecare din dezvoltarea determinantului d_{ij} , din egalitatea (3) și ținând seamă de prima parte a demonstrației, rezultă că semnul termenului $(-1)^{i+j}a_{1k_1}a_{2k_2} \dots a_{i-1,k_{i-1}}a_{i+1,k_{i+1}} \dots a_{nk_n}$ provenit din produsul $a_{ij}\delta_{ij}$ este același cu cel dat de dezvoltarea determinantului d . În concluzie, fiecare termen din produsul $a_{ij}\delta_{ij}$ luat cu semnul său este un termen cu același semn, al determinantului d . Cum produsul $a_{ij}\delta_{ij}$ conține $(n-1)!$ termeni, atunci toți termenii care apar în suma (2) sînt în număr de $(n-1)!n = n!$. Deci în suma (2) se găsesc toți termenii (inclusiv semnul) determinantului d . Deci are loc egalitatea $d = S$.

Consecința 1. Fie $d = |a_{ij}|_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ un determinant de ordinul n . Pentru orice

$j \neq i$ are loc egalitatea

$$a_{i1}\delta_{j1} + a_{i2}\delta_{j2} + \dots + a_{in}\delta_{jn} = 0.$$

Demonstrație. Considerăm determinantul

$$d' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (i) \\ (j) \end{matrix}$$

care s-a obținut din d prin înlocuirea liniei j cu linia i . Cum d' are două linii egale, aplicînd proprietatea 4 a determinantilor, avem $d' = 0$. Dezvoltînd determinantul d' după linia j (conform teoremei 1) obținem egalitatea căutată.

Din proprietatea 1 a determinantilor și teorema 1 obținem

Teorema 2. Fie determinantul de ordinul n , $d = |a_{ij}|_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. Atunci pentru

orice $1 \leq j \leq n$ are loc egalitatea

$$d = a_{1j}\delta_{1j} + a_{2j}\delta_{2j} + \dots + a_{nj}\delta_{nj}. \quad (1')$$

Egalitatea (1') poartă denumirea de dezvoltarea determinantului d după coloana j .

Consecința 2. Fie $d = |a_{ij}|_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ un determinant de ordinul n . Pentru orice

$i \neq j$ are loc egalitatea

$$a_{1j}\delta_{1i} + a_{2j}\delta_{2i} + \dots + a_{nj}\delta_{ni} = 0.$$

Demonstrație Se aplică proprietatea 1 a determinantilor și consecința 1

După cum se observă, teorema 1 cît și teorema 2 dau procedee prin care calculul unui determinant de ordinul n se reduce la calculul unui anumit număr de determinanți de ordinul $n - 1$. Pentru a simplifica calculele, în aplicații, vom face dezvoltarea unui determinant după acea linie sau coloană care are cel mai mare număr de elemente egale cu zero. Din aceste motive, la calculul unui determinant vom aplica sistematic cele 9 proprietăți ale determinantilor pentru ca, pe o anumită linie sau coloană, să obținem cît mai multe elemente egale cu zero.

Exemple 1) Să calculăm determinantul de ordinul 4:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & -5 & 4 & -4 \end{vmatrix}.$$

Cum linia a treia conține un element nul vom face dezvoltarea determinantului după linia a treia

$$\begin{aligned} d &= (-1)^{3+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \\ -5 & 4 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -5 & -4 \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^{3+4} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & -5 & 4 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Calculăm primul determinant de ordinul 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \\ -5 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -5 \\ -5 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \\ -5 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 75.$$

La calculul acestui determinant am procedat astfel: mai întîi am adunat linia 3 la linia 1 și apoi am adunat coloana 1 la coloana 2. În final am dezvoltat determinantul după prima linie.

Calculăm al doilea determinant

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -5 & -4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= 7 \cdot (-29) + 3 \cdot 18 = -149. \end{aligned}$$

La calculul acestui determinant am adunat mai întîi linia 3 la linia 1 și apoi am făcut dezvoltarea după linia 1.

Calculăm al treilea determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 6 & -5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 7 \\ 6 & -17 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -17 & 10 \end{vmatrix} = -50 + 119 = 69.$$

La calculul acestui determinant am procedat astfel: mai întâi am adunat coloana 1 la coloana 3, apoi am înmulțit prima coloană cu -2 și am adunat-o la coloana a doua. În final, am dezvoltat determinantul după prima linie. Deci valoarea determinantului d este:

$$d = 2 \cdot 75 - 149 + 69 = 70$$

2) Să calculăm determinantul de ordinul 4:

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Cum coloana a treia conține două elemente egale cu zero vom face dezvoltarea după această coloană:

$$d = (-1)^{2+3} \cdot 3 \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot (-4) \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Calculăm primul determinant de ordinul 3.

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 11 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -11 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 77.$$

La calculul acestui determinant am adunat linia 3 la prima linie și apoi am dezvoltat determinantul obținut după prima linie.

Calculăm al doilea determinant:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 13 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 13 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -80 - 13 = -67.$$

La calculul acestui determinant am înmulțit linia a 2-a cu 2 și apoi am adunat-o la prima. În final, am făcut dezvoltarea după prima linie. Valoarea determinantului d este

$$d = (-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot 77 + (-1)^{4+3} \cdot (-4) \cdot 67 = -231 + 268 = 37$$

3) Să calculăm determinantul

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Facem dezvoltarea după prima linie și obținem

$$d = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

În continuare facem dezvoltarea tot după prima linie și obținem

$$d = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Continuând procedeul ca mai sus obținem în final că

$$d = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}.$$

Exerciții

1. Să se calculeze determinanții de ordinul doi:

$$a) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}; \quad d) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix};$$

$$e) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}; \quad f) \begin{vmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{vmatrix}; \quad g) \begin{vmatrix} \sqrt{2} + \sqrt{3} & 2 - \sqrt{5} \\ 2 + \sqrt{5} & \sqrt{2} - \sqrt{3} \end{vmatrix};$$

$$h) \begin{vmatrix} \log_a b & \log_c d \\ \log_d c & \log_b a \end{vmatrix}; \quad i) \begin{vmatrix} \omega & \omega \\ -1 & \omega \end{vmatrix}; \quad j) \begin{vmatrix} \omega^2 & \omega \\ -\omega & 1 \end{vmatrix}; \quad k) \begin{vmatrix} 2^\alpha & 2^\beta \\ 2^{-\alpha} & 2^{-\beta} \end{vmatrix},$$

unde ω este o rădăcină cubică a unității ($\omega^3 = 1$), α, β sînt numere reale.

2. Să se calculeze determinanții de ordinul 3 folosind regula lui Sarrus:

$$a) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad d) \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix};$$

$$e) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} \text{ unde } \omega \text{ este o rădăcină cubică a unității } (\omega^3 = 1);$$

$$f) \begin{vmatrix} a^3 & ab & b^3 \\ b^3 & a^3 & ab \\ ab & b^3 & a^3 \end{vmatrix}; \quad g) \begin{vmatrix} a^3 & 2ab & b^3 \\ b^3 & a^3 & 2ab \\ 2ab & b^3 & a^3 \end{vmatrix}.$$

3. Cu ce semn vor apărea în determinantul de ordinul 5 termenii:

$$a) a_{11}a_{22}a_{31}a_{43}a_{55}; \quad b) a_{12}a_{23}a_{33}a_{41}a_{54}; \quad c) a_{13}a_{21}a_{34}a_{41}a_{52}?$$

4. În determinantul de ordinul 4, se găsesc termenii următori:

$$a) a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}; \quad b) a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}; \quad c) a_{13}a_{21}a_{34}a_{44}?$$

5. Cu ce semn apare, în determinantul de ordinul n , produsul elementelor de pe diagonala principală?

6. Cu ce semn apare, în determinantul de ordinul n , produsul elementelor de pe diagonala secundară?

7. Să se scrie toți termenii care apar în determinantul de ordinul 6 și care sînt de forma $a_{14}a_{24}a_{32}a_{41}a_{52}a_{63}$.

8. Folosind numai definiția determinanților de ordin n , să se calculeze următorii determinanți:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 3 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 0 & \dots & & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

9. Fie $d = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ unde a_{ij} sînt numere complexe. Dacă $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ oricare ar fi $i = 1, 2, \dots, n$ și $j = 1, 2, \dots, n$, să se arate că d este un număr real.

10. Să se calculeze determinanții:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{f) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{g) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & 5 \\ -3 & -4 & -5 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{h) } \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{i) } \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ & -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

11. Să se verifice egalitățile:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2abc(a-b)(b-c)(c-a);$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3;$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (xy + yz + zx)(x-y)(y-z)(z-x);$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} a^3 & 2a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^4.$$

12. Să se rezolve ecuația:

$$\begin{vmatrix} a^2 - x & ab & ac \\ ba & b^2 - x & bc \\ ca & cb & c^2 - x \end{vmatrix} = 0.$$

13. Să se rezolve ecuația:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0.$$

14. Să se rezolve ecuația:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0$$

15. Să se calculeze determinantul de ordinul n :

$$\begin{vmatrix} -1 & a & a & \dots & a \\ a & -1 & a & \dots & a \\ a & a & -1 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

16. Să se calculeze determinantul

$$d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

știind că x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$.

17. Să se calculeze determinantul

$$d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

știind că x_1, x_2, x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuației $x^4 + px^3 + qx + r = 0$.

18. Să se demonstreze prin inducție după n că determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

este egal cu $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)$.

CAPITOLUL IV

Rangul unei matrice. Matrice inversabile

1. Rangul unei matrice. Să considerăm o matrice A cu m linii și n coloane cu elemente numere complexe,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),$$

iar k un număr natural, astfel încât $1 \leq k \leq \min(m, n)$ (prin $\min(m, n)$ înțelegem cel mai mic dintre numerele m și n).

Dacă în A alegem k linii: i_1, i_2, \dots, i_k și k coloane: j_1, j_2, \dots, j_k , elementele care se găsesc la intersecția acestor linii și coloane formează o matrice pătratică de ordin k :

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C}),$$

al cărei determinant se numește *minor de ordin k al matricei A* .

Observăm că din matricea A se pot obține $C_m^k \cdot C_n^k$ minori de ordinul k ai matricei A .

În continuare ne va interesa să aflăm ordinele minorilor nenuli ai matricei A și în special ordinul cel mai mare al acestor minori (nenuli).

Să considerăm $A \neq 0_{m,n}$ o matrice cu m linii și n coloane. Cum matricea A are elemente nenule, există minori nenuli de un anumit ordin $k \geq 1$. Dar mulțimea minorilor matricei A fiind finită este evident că există un număr natural r , $1 \leq r \leq \min(m, n)$, astfel încât să avem cel puțin un minor de ordin r nenul, iar toți minorii de ordin mai mare decât r (dacă există) să fie nuli.

Definiție. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ o matrice nenulă. Spunem că matricea A are *rangul r* și scriem $\text{rang } A = r$ dacă A are un minor nenul de ordin r , iar toți minorii lui A de ordin mai mare decât r (dacă există) sînt nuli.

Dacă A este matricea nulă, convenim să spunem că matricea are rangul 0, adică $\text{rang } (0_{m,n}) = 0$.

Pentru calculul rangului unei matrice este utilă teorema următoare.
Teorema 1. Fie $A \neq 0_{m,n}$ o matrice. Numărul natural r este rangul matricei A dacă și numai dacă există un minor de ordinul r al lui A , nenul, iar toți minorii de ordinul $r + 1$ (dacă există) sînt nuli.

Demonstrație. Dacă r este rangul matricei A , atunci toți minorii de ordin mai mare decît r sînt nuli; deci și cei de ordin $r + 1$ sînt nuli. Pentru a demonstra reciproca, este suficient să observăm că dacă toți minorii de un anumit ordin k ai matricei A sînt nuli, atunci sînt nuli și minorii de ordin $k + 1$ ai matricei. Într-adevăr, dezvoltînd un minor de ordin $k + 1$ după elementele unei linii (sau unei coloane) obținem o sumă de produse, în fiecare produs fiind ca factor un minor de ordinul k al matricei. Aceștia fiind nuli rezultă că suma este nulă, adică minorul de ordin $k + 1$ este nul.

Exemple. 1) Să calculăm, rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix}.$$

Calculăm minorii de ordinul al treilea al matricei A și găsim că toți sînt nuli:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & -13 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -1 & 3 & -3 \\ 5 & -13 & 11 \end{vmatrix} = 0.$$

Deoarece există minorii de ordinul al doilea nenuli, ca de exemplu:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

rezultă că $\text{rang } A = 2$.

2) Să calculăm rangul matricei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculînd minorii de ordinul al patrulea, găsim că minorul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

este nenul și nu există minorii de ordin mai mare (matricea avînd patru linii).
 Deci $\text{rang } B = 4$.

Calculul în acest mod al rangului unei matrice este în general anevoios. Vom da ulterior un mod de calcul mult mai simplu al rangului.

Vom expune acum un rezultat util pentru unele considerații asupra rangului produsului a două matrice.

Teorema 2. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B \in \mathcal{M}_{n,s}(\mathbb{C})$ două matrice. Atunci orice minor de ordin k , $1 \leq k \leq \min(m, s)$, al produsului de matrice AB se poate scrie ca o combinație liniară de minorii de ordinul k ai matricei A (sau, că o combinație liniară de minorii de ordinul k ai matricei B).

Demonstrație. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ și $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq s}}$ cele două matrice. Atunci produsul lor se scrie:

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{h=1}^n a_{1h}b_{h1} & \sum_{h=1}^n a_{1h}b_{h2} & \dots & \sum_{h=1}^n a_{1h}b_{hs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{h=1}^n a_{mh}b_{h1} & \sum_{h=1}^n a_{mh}b_{h2} & \dots & \sum_{h=1}^n a_{mh}b_{hs} \end{pmatrix}.$$

Să considerăm un minor δ de ordin k al matricei AB , situat la intersecția liniilor i_1, i_2, \dots, i_k , și coloanelor j_1, j_2, \dots, j_k .

$$\delta = \begin{vmatrix} \sum_{h=1}^n a_{i_1h}b_{hj_1} & \sum_{h=1}^n a_{i_1h}b_{hj_2} & \dots & \sum_{h=1}^n a_{i_1h}b_{hj_k} \\ \sum_{h=1}^n a_{i_2h}b_{hj_1} & \sum_{h=1}^n a_{i_2h}b_{hj_2} & \dots & \sum_{h=1}^n a_{i_2h}b_{hj_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{h=1}^n a_{i_kh}b_{hj_1} & \sum_{h=1}^n a_{i_kh}b_{hj_2} & \dots & \sum_{h=1}^n a_{i_kh}b_{hj_k} \end{vmatrix}.$$

Deoarece fiecare element al lui δ este suma a n termeni, δ se poate descompune, folosind proprietatea 7 din Cap. III, pct. 3, într-o sumă de n^k minori de forma:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1h_1}b_{h_1j_1} & a_{i_1h_2}b_{h_2j_1} & \dots & a_{i_1h_k}b_{h_kj_1} \\ a_{i_2h_1}b_{h_1j_2} & a_{i_2h_2}b_{h_2j_2} & \dots & a_{i_2h_k}b_{h_kj_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_kh_1}b_{h_1j_k} & a_{i_kh_2}b_{h_2j_k} & \dots & a_{i_kh_k}b_{h_kj_k} \end{vmatrix} = \\ = b_{h_1j_1}b_{h_2j_2} \dots b_{h_kj_k} \begin{vmatrix} a_{i_1h_1} & a_{i_1h_2} & \dots & a_{i_1h_k} \\ a_{i_2h_1} & a_{i_2h_2} & \dots & a_{i_2h_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_kh_1} & a_{i_kh_2} & \dots & a_{i_kh_k} \end{vmatrix}.$$

Deci δ este o combinație liniară de minori de ordinul k ai matricei A .

Analog se arată că δ este o combinație liniară de minori de ordinul k ai matricei B .

Din această teoremă se deduce următoarea:

Teoremă. Dacă A și B sunt două matrice de dimensiuni $m \times n$ și $n \times s$, atunci rangul produsului lor este cel mult egal cu rangul fiecărei matrice.

Demonstrație. Într-adevăr, fie A și B două matrice astfel încât să putem efectua produsul AB , și să presupunem că toți minorii de ordin k ai lui A (sau ai lui B) sînt nuli. Conform teoremei precedente rezultă că minorii de ordin k ai matricei AB , care sînt combinații liniare de minori de ordin k ai matricei A (sau ai matricei B) sînt, de asemenea, nuli. După definiția rangului unei matrice, rezultă deci că $\text{rang}(AB) \leq \text{rang } A$ și $\text{rang}(AB) \leq \text{rang } B$.

Observație. Nu există o relație bine determinată între rangurile factorilor și rangul produsului de matrice, după cum se poate vedea din exemplele următoare:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

În aceste două exemple în care se înmulțesc matrice de rang 1, produsul este, în primul caz, de rang 1, iar în cazul al doilea de rang 0.

2. Matrice inversabile. O matrice pătratică se numește *singulară* (sau *degenerată*) dacă determinantul său este nul, și se numește *nesingulară* (sau *nedegenerată*) dacă determinantul său este nenul.

Amintim că am notat cu I_n matricea unitate de ordin n , adică matricea pătratică cu n linii și n coloane:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea I_n comută cu orice matrice A de același ordin cu ea; mai mult:

$$AI_n = I_n A = A. \quad (1)$$

Definiție Fie A o matrice pătratică de ordin n . Se spune că A este *inversabilă* dacă există o matrice B pătratică de ordin n astfel încît

$$AB = BA = I_n.$$

Matricea B se numește *inversa* matricei A .

Observăm, de asemenea, că și A este inversa lui B .

Teoremă 1 Inversa unei matrice pătratică, dacă există, este unică.

Demonstrație Fie A o matrice pătratică de ordin n . Să presupunem că B și B' sînt două matrice de ordin n , astfel încît

$$AB = BA = I_n \text{ și } AB' = B'A = I_n.$$

Folosind asociativitatea produsului de matrice, avem

$$B' = B'I_n = B'(AB) = (B'A)B = I_n B = B;$$

deci $B = B'$.

Notăție. Inversa matricei A , dacă există, se notează cu A^{-1} .

Din relația

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

rezultă că $(A^{-1})^{-1} = A$.

În continuare vom studia problema existenței inversei unei matrice pătratică date. Mai întîi demonstrăm următoarea

Teoremă 2 Fie A o matrice pătratică de ordin n cu coeficienți numere complexe. Atunci matricea A este inversabilă dacă și numai dacă $\det A$ este nenul (adică A este nesingulară).

Demonstrație Să presupunem că A este o matrice inversabilă de ordin n ; atunci există A^{-1} astfel încît:

$$AA^{-1} = I_n \quad (2)$$

(I_n este matricea unitate de ordin n).

Este evident că $\text{rang } I_n = n$. Conform consecinței din paragraful precedent avem că $\text{rang } (AA^{-1}) \leq \text{rang } A$. Cum $\text{rang } (AA^{-1}) = \text{rang } I_n = n$, rezultă că $n \leq \text{rang } A$ și deci $\text{rang } A = n$. Așadar, ordinul celui mai mare minor nenul al lui A este n , acesta fiind tocmai $\det A$. Deci $\det A \neq 0$, adică A este nesingulară.

Reciproc, dacă A este o matrice nesingulară, adică $d = \det A \neq 0$, demonstrăm că ea este inversabilă, construind efectiv inversa sa.

Definim mai întâi o matrice ajutătoare. Dacă A este matricea de ordin n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

atunci matricea

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

al cărei element aparținând liniei j și coloanei i este complementul algebric al elementului a_{ij} din matricea A , se numește *matricea adjunctă* matricei A .

Să calculăm produsele AA^* și A^*A . Folosind formula de dezvoltare a unui determinant după elementele uneia dintre linii (sau coloane), cît și faptul că suma produselor dintre elementele unei linii (sau coloane) a unui determinant și complementii algebrici ai elementelor corespunzătoare ale altei linii (sau coloane) este nulă (vezi, Cap. III, pct. 5, consecința 1), obținem:

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix} \quad (3)$$

unde d este determinantul matricei A . Împărțind prin d egalitățile (3), se obține:

$$A \left(\frac{1}{d} A^* \right) = \left(\frac{1}{d} A^* \right) A = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Așadar, $A \left(\frac{1}{d} A^* \right) = \left(\frac{1}{d} A^* \right) A = I_n$ și deci A este inversabilă.

Avem $A^{-1} = \frac{1}{d} A^*$, sau explicit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \dots & \frac{A_{n2}}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \dots & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix}.$$

Deci inversa unei matrice nesingulare A se obține împărțind elementele matricei adjunkte A^* prin $d = \det A$.

Observații 1) Dacă A este o matrice nesingulară, deci inversabilă, atunci A^{-1} este, de asemenea, inversabilă ($(A^{-1})^{-1} = A$) și deci nesingulară.

2) Dacă A este o matrice nesingulară, atunci matricea sa adjunctă A^* este nesingulară.

Într-adevăr, dacă A este o matrice de ordin n , nesingulară, avem relația

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix}, \quad (4)$$

unde $d = \det A$ și A^* este matricea adjunctă.

Este suficient să observăm că rangul matricei din dreapta egalităților (4) este n și, ca în teorema precedentă, rezultă că $\text{rang } A^* = n$, adică $\det A^* \neq 0$.

3) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ (respectiv $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) cu $\det A \neq 0$, atunci $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ (respectiv $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Exemplu. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculăm determinantul său și obținem

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Determinantul său fiind nenul, matricea A este inversabilă. Avem

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Să calculăm A_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$. De exemplu,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

ș.a.m.d.

Deci $A^* = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ și astfel

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{-7} & \frac{4}{-7} & \frac{5}{-7} \\ \frac{-2}{-7} & \frac{5}{-7} & \frac{1}{-7} \\ \frac{1}{-7} & \frac{-6}{-7} & \frac{-4}{-7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

Observații. 1) În exemplul precedent matricea $A \in M_3(\mathbb{Z})$ are ca elemente numere întregi, iar elementele lui A^{-1} nu sînt numere întregi, adică A nu este inversabilă în $M_3(\mathbb{Z})$.

Este evident că, dacă $A \in M_n(\mathbb{Z})$ și $\det A = \pm 1$, atunci $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$, adică A este inversabilă în $M_n(\mathbb{Z})$.

2) Fie A și B două matrice pătratice de ordin n astfel încît A să fie nesingulară (deci există A^{-1}). Să considerăm ecuațiile matriceale:

$$AX = B, \quad YA = B. \quad (5)$$

Înmulțind prima ecuație la stînga cu A^{-1} și pe a doua la dreapta cu A^{-1} , se obține:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B, \quad (YA)A^{-1} = BA^{-1}.$$

Folosind asociativitatea înmulțirii matricelor, rezultă

$$X = A^{-1}B \text{ și } Y = BA^{-1}.$$

În general, soluțiile ecuațiilor (5) sînt matrice distincte, deoarece înmulțirea matricelor nu este comutativă.

De exemplu, fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matricea A este nesingulară, avînd determinantul 1.

Deci există matricea A^{-1} , care este

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soluțiile ecuațiilor matriceale:

$$AX = B \text{ și } YA = B$$

sînt deci, respectiv, matricele:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -12 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze rangurile matricelor:

1. a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

2. a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 8 & 10 \\ 8 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & 9 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & \alpha & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

3. a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$4. a) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & -12 & 3 & -7 & -8 \\ 10 & 2 & 7 & 1 & 10 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -2 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_m^{n-1} \end{pmatrix}, \text{ unde } m \leq n, \text{ iar } a_1, a_2, \dots, a_m \text{ sînt numere diferite}$$

între ele două cîte două.

6. Să se afle valorile posibile ale rangului matricei

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m,n-1} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{pmatrix},$$

unde $a_{in} (1 \leq i \leq m)$ și $a_{mj} (1 \leq j \leq n)$ sînt numere oarecare.

7. Să se afle valorile lui $\alpha \in \mathbb{C}$, pentru care matricea

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ \alpha & 3 & 5 & -3 \\ 7 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

are rangul minim.

8. Să se calculeze rangul matricei

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2\alpha & 5 \\ 2 & 10 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

pentru diferite valori ale lui $\alpha \in \mathbb{C}$.

9. Să se demonstreze că rangul unei matrice nu se schimbă dacă

a) se transpune matricea;

b) se înmulțesc elementele unei linii sau unei coloane cu un număr nenul;

c) se permută între ele două linii (coloane);

d) se adaugă la elementele unei linii (coloane) elementele corespunzătoare ale altei linii (coloane) înmulțite cu un număr oarecare.

Să se afle dacă matricele următoare sînt inversabile și în caz afirmativ să se găsească inversele lor:

$$10. a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$11. a) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \text{ unde } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

$$12. a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}, \text{ unde } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$13. a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$14. a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ unde } \lambda \in \mathbb{C}.$$

15. Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze:

$$2A - 2B; AB; B^{-1}; B + B^{-1}.$$

16. Să se afle cum se modifică inversa A^{-1} a matricei A , dacă asupra lui A se efectuează una dintre transformările:

a) se permută între ele două linii (coloane);

b) se înmulțesc elementele unei linii (coloane) cu un număr nenul;

c) se adaugă la elementele unei linii (coloane) elementele corespunzătoare ale altei linii (coloane) înmulțite cu un număr oarecare.

17. Fie A și B matrice inversabile de același ordin. Să se arate că următoarele egalități sînt echivalente:

$$AB = BA; AB^{-1} = B^{-1}A, A^{-1}B = BA^{-1}; A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Să se rezolve următoarele ecuații matriceale:

$$18. a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}; \quad b) X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$19. \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$20. X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$21. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$22. \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

CAPITOLUL V

Sisteme de ecuații liniare

1. **Noțiuni generale.** În acest capitol ne vom ocupa de sistemele de ecuații algebrice de gradul întâi cu mai multe necunoscute sau, așa cum li se mai spune de obicei, *sistemele de ecuații liniare*.

Studiul acestora este foarte important pentru matematică. Spre deosebire de clasele anterioare, vom studia acum sistemele cu un număr oarecare de ecuații și de necunoscute, chiar și cazurile când numărul de ecuații ale sistemului nu va fi egal cu numărul necunoscutelor.

Fie dat un sistem de m ecuații cu n necunoscute. Convenim să notăm necunoscutele prin: x_1, x_2, \dots, x_n , coeficientul cu care apare necunoscuta x_j din ecuația a i -a prin: a_{ij} , iar membrul al doilea (numit termenul liber) din ecuația a i -a prin b_i . Cu aceste notații, sistemul de ecuații liniare se scrie sub forma generală:

[illegible]

Sistemul (1) poate fi scris condensat sub forma:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (1')$$

Coeficienții necunoscutelor formează o matrice cu m linii și n coloane:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

numită *matricea coeficienților sistemului* sau, simplu, *matricea sistemului*.
Matricea cu m linii și $n + 1$ coloane

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

care se obține adăugind la coloanele matricei A coloana termenilor liberi b_1, b_2, \dots, b_m , se numește *matricea extinsă* a sistemului.

Un sistem de numere $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ se numește *soluție* a sistemului (1), dacă înlocuind necunoscutele x_1, x_2, \dots, x_n respectiv prin aceste numere, toate ecuațiile acestui sistem sînt verificate, adică

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Un sistem de ecuații care nu are soluții se numește *incompatibil*. Așa este, de exemplu, sistemul:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 = 9. \end{cases}$$

Deoarece primii membri ai celor două ecuații ale sistemului sînt aceiași, iar membrii ai doilea sînt diferiți între ei, este evident că nici un sistem de valori ce înlocuiesc necunoscutele x_1, x_2 nu poate satisface simultan ambele ecuații.

Un sistem de ecuații liniare care are cel puțin o soluție se numește *compatibil*. Un sistem compatibil se numește *determinat* dacă are o singură soluție, și se numește *nedeterminat* dacă are mai mult decît o soluție.

Astfel, sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7, \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

este determinat, deoarece are soluția $x_1 = 4, x_2 = 1$ și aceasta este singura soluție a sistemului.

Sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}$$

este nedeterminat, deoarece are mai multe soluții (chiar o mulțime infinită de soluții) $x_1 = k, x_2 = 2k - 1$, k fiind un număr arbitrar. (3)

Observăm că soluțiile care se obțin din formulele (3) ne dau întreaga mulțime de soluții a sistemului.

În legătură cu sistemele de ecuații liniare ne punem problema stabilirii unor metode care să ne permită să decidem dacă un sistem de ecuații dat este compatibil sau nu, iar în cazul în care este compatibil, să putem spune dacă este determinat sau nu, și să dăm procedee de găsire a tuturor soluțiilor sale.

2. Regula lui Cramer. La început vom relua rezolvarea unui sistem de ecuații liniare de trei ecuații cu trei necunoscute, expusă în cap. III, pct. 1.

Să considerăm sistemul:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1)$$

Matricea sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Să presupunem că determinantul $d = \det A$ al matricei A este *nenul*. Numărul $d = \det A$ se numește *determinantul sistemului*.

Să notăm prin X respectiv B , coloana necunoscutelor, respectiv a termenilor liberi, adică

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Numărul coloanelor matricei A fiind egal cu acela al liniilor matricei X , produsul AX se poate efectua și este egal cu coloana primilor membri ai ecuațiilor (1). Astfel, sistemul (1) se poate scrie sub forma unei ecuații matriceale:

$$AX = B. \quad (2)$$

Matricea A fiind nesingulară, există inversa sa A^{-1} . Înmulțind la stînga ambii membri ai ecuației (2) cu A^{-1} , obținem $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, sau $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$, adică $I_3X = A^{-1}B$, unde I_3 este matricea unitate de ordin 3.

În final, obținem:

$$X = A^{-1}B.$$

Ținînd seama de notațiile de mai înainte și de faptul că

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \frac{A_{31}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \frac{A_{32}}{d} \\ \frac{A_{13}}{d} & \frac{A_{23}}{d} & \frac{A_{33}}{d} \end{pmatrix}$$

obținem:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \frac{A_{31}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \frac{A_{32}}{d} \\ \frac{A_{13}}{d} & \frac{A_{23}}{d} & \frac{A_{33}}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} (A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3) \\ \frac{1}{d} (A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3) \\ \frac{1}{d} (A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3) \end{pmatrix}.$$

Din egalitatea matricelor rezultă că:

$$x_1 = \frac{1}{d} (A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3),$$

$$x_2 = \frac{1}{d} (A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3),$$

De exemplu,

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ș.a.m.d.

Teorema (Regula lui Cramer). Cu notațiile de mai înainte, dacă $d \neq 0$ și A este nenul, atunci sistemul (4) are o soluție unică, anume:

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \quad x_2 = \frac{d_2}{d}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{d_n}{d}.$$

Demonstrație. Ca și în exemplul considerat mai înainte, sistemul (4) poate fi scris sub forma unei ecuații matriceale:

$$AX = B. \quad (5)$$

Cum A este nesingulară există inversa A^{-1} , înmulțim la stînga ambii membri ai ecuației (5) cu A^{-1} și obținem

$$X = A^{-1}B.$$

Dar

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \dots & \frac{A_{n2}}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \dots & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix}$$

și cu notațiile precedente obținem

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \dots & \frac{A_{n2}}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \dots & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n A_{i1} b_i \\ \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n A_{i2} b_i \\ \dots \\ \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n A_{in} b_i \end{pmatrix}$$

$$\text{de unde } x_j = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n A_{ij} b_i, \quad 1 \leq j \leq n.$$

$$\text{Dar, avem } \sum_{i=1}^n A_{ij} b_i = d_j \text{ și deci}$$

$$x_j = \frac{d_j}{d}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (6)$$

În concluzie, un sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute, al cărui determinant este nenul, este compatibil determinat, iar soluția sa este dată de formulele (6), numite *formulele lui Cramer*.

Observație. Dacă sistemul (4) are coeficienți numere raționale (respectiv numere reale), atunci soluțiile sale sînt raționale (respectiv reale).

Exemple. 1) Să rezolvăm sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = t, \quad (a \neq b, b \neq c, a \neq c), \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = t^2. \end{cases}$$

Determinantul

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

al acestui sistem este nenul, soluția este dată de formulele lui Cramer. Avem

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & b & c \\ t^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-t)(c-t)(c-b)$$

și deci

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = \frac{(b-t)(c-t)}{(b-a)(c-a)},$$

x_2 și x_3 se deduc analog.

2) Să rezolvăm sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$$

Determinantul

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -9$$

al acestui sistem fiind nenul, soluția este dată de formulele lui Cramer.

Valorile necunoscutelor vor avea la numărător determinanții:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0; \quad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -18;$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -6 & 5 \end{vmatrix} = -15; \quad d_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 12.$$

Ausfol, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{5}{3}$, $x_4 = -\frac{4}{3}$

este soluția sistemului nostru; mai mult, aceasta este unica soluție.

3. **Calculul rangului unei matrice.** Am observat în cap. IV, pct. 1 că metoda de calcul a rangului unei matrice (bazată pe definiția rangului) necesită, în general, calculul unui număr destul de mare de mări de minori. În cele ce urmează vom arăta cum se poate simplifica considerabil acest calcul.

Am arătat în cap. III, pot. 3, ce înțelegem prin faptul că o coloană (respectiv linie) a unei matrice este combinație liniară de celelalte coloane (respectiv linii) ale matricei.

Fie acum $D = |a_{ij}|$, $1 \leq i, j \leq n$, un determinant, iar A matricea (a_{ij}) , $1 \leq i, j \leq n$. Dacă o coloană (respectiv linie) a matricei A este combinație liniară de celelalte coloane (respectiv linii) ale sale, se obișnuiește să se spună: coloana (respectiv linia) determinantului este combinație liniară de celelalte coloane (respectiv linii) ale sale.

[illegible]

Demonstrație Să considerăm sistemul de ecuații liniare:

[illegible]

de $k - 1$ ecuații cu $k - 1$ necunoscute. Deoarece determinantul sistemului, care este tocmai d , este nenul, rezultă că sistemul este compatibil determinat.

Există deci numerele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ astfel încât:

[illegible]

Scădem din ultima coloană a lui D combinația liniară a primelor $k - 1$ coloane cu coeficienții $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ și rezultă:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \dots & a_{k-1,k-1} & 0 \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{k,k-1} & a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} \alpha_j \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltăm determinantul după elementele ultimei coloane și obținem:

$$D = d(a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}\alpha_j) = 0.$$

Cum $d \neq 0$, rezultă

$$a_{kk} = \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}\alpha_j = a_{k1}\alpha_1 + a_{k2}\alpha_2 + \dots + a_{k,k-1}\alpha_{k-1}.$$

Această relație, împreună cu relațiile (2) exprimă faptul că ultima coloană din D este o combinație liniară a celorlalte $k - 1$ coloane ale lui D , cu coeficienții:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}.$$

Coeficienții $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ ai combinației liniare din teorema precedentă sînt independenți de linia k , după cum rezultă din formulele lui Cramer.

Operația prin care adăugăm unui determinant o linie și o coloană se numește, de obicei, *bordarea* determinantului.

Așadar, dacă bordăm determinantul d de ordin $k - 1$ din teorema precedentă cu o altă linie și coloană, astfel încît determinantul de ordinul k obținut să fie nul, atunci, și în acest caz, ultima coloană (respectiv linie) a acestui determinant este combinație liniară de celelalte coloane (respectiv linii).

Am demonstrat în cap. III, pct. 3 (proprietatea 8) faptul că un determinant care are proprietatea că o coloană (respectiv linie) a sa este combinație liniară de celelalte coloane (respectiv linii) este nul.

Teorema precedentă ne arată că este adevărată și afirmația reciprocă. Deci:

Consecință 1. Un determinant este nul dacă și numai dacă există o coloană (respectiv linie) care este combinație liniară de celelalte coloane (respectiv linii).

Consecință 2. Dacă un determinant este nul, atunci există cel puțin o coloană (respectiv linie) care este combinație liniară de celelalte coloane (respectiv linii). Dacă nu există o astfel de coloană (respectiv linie), atunci determinantul nu este nul.

Astfel, dacă rangul unei matrice A cu m linii și n coloane este r , iar D_r este un minor de ordinul r , nenul, coloanele (respectiv liniile) matricei A cuprinse în D_r au proprietatea că nici una dintre ele nu este combinație liniară de celelalte. Mai mult, după cum rezultă din observația precedentă, fiecare dintre celelalte $n - r$ coloane (respectiv $m - r$ linii) este combinație liniară a coloanelor (respectiv liniilor) lui D_r .

Deci numărul r , care reprezintă rangul matricei A , poate fi găsit după procedeul prin care arătăm că acele coloane (respectiv linii) ale matricei A care sînt cuprinse în D_r au proprietatea indicată în consecința 2.

Or, în demonstrație am folosit numai faptul că toți minorii de ordinul $r + 1$, care se obțin prin bordarea lui D_r cu una dintre liniile și cu una dintre coloanele rămase, sînt nuli. Nu am folosit faptul că toți minorii de ordin $r + 1$ sînt nuli.

Pentru a calcula rangul unei matrice, trebuie să trecem în mod iterativ de la un minor la cei de ordin mai mare, obținuți prin bordarea cu linii și coloane dintre cele rămase în afara minorului considerat.

Astfel, rangul unei matrice se poate calcula în modul următor:

Fiind dată o matrice nenulă, aceasta are neapărat un minor de ordinul întâi nenul (putem lua orice element nenul al matricei).

Dacă am găsit un minor de ordinul k nenul, îl bordăm pe rând cu elementele corespunzătoare ale uneia dintre liniile și uneia dintre coloanele rămase, obținând astfel toți minorii de ordinul $k + 1$ care-l conțin. Dacă toți acești minori sînt nuli, rangul matricei este $r = k$.

Dacă însă cel puțin unul dintre aceștia (de ordinul $k + 1$) este nenul, atunci reținem unul dintre ei și continuăm procedeul.

Numărul minorilor de ordin $r + 1$ care trebuie considerați este $(m - r) \cdot (n - r)$ (în loc de $C_m^{r+1} C_n^{r+1}$), reducîndu-se în mod substanțial numărul lor.

Observație În general, numărul $(m - r)(n - r)$ al minorilor de ordin $r + 1$ ce trebuie calculați pentru a stabili că o matrice are rangul r nu mai poate fi micșorat. Totuși numărul de calcule necesar pentru a afla rangul unei matrice se poate reduce în diverse cazuri particulare.

Exemplu. Să calculăm rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Minorul de ordinul 2, care se găsește la intersecția primelor două linii și a primelor două coloane, este nul.

Totuși, matricea A are minori de ordinul 2 nenuli, de exemplu:

$$d = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Minorul de ordinul 3

$$d' = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

care încadrează minorul d este nenul. Dar cei doi minori de ordinul 4 care încadrează pe d' sînt nuli:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Deci rangul matricei A este 3.

4. **Sisteme de ecuații liniare.** Ne vom ocupa în acest paragraf de studiul sistemelor oarecare de ecuații liniare, fără a impune ca numărul necunoscutelor să fie egal cu numărul ecuațiilor. Rezultatele obținute vor fi valabile în cazul în care numărul ecuațiilor este egal cu numărul necunoscutelor, determinantul sistemului este nul, caz care nu a fost studiat pînă acum.

Fie un sistem de ecuații liniare, cu m ecuații și n necunoscute:

[illegible]

Ne punem mai întâi problema compatibilității sistemului (1). Pentru aceasta, să analizăm matricea A a coeficienților sistemului și matricea extinsă \bar{A} , care se obține din A completând coloanele sale cu coloana termenilor liberi ai sistemului (1),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Este evident că $\text{rang}(A) \leq \text{rang}(\tilde{A})$, deoarece minorii matricei A se găsesc printre minorii matricei \tilde{A} .

Problema compatibilității sistemelor de ecuații liniare este rezolvată de următoarea teoremă:

Un sistem de ecuații liniare (1) este compatibil dacă suma de-a lungul matricii sistemului 1 este egal cu rangul matricii extinse \tilde{A} .

Demonstrație. Să presupunem, mai întâi, că sistemul (1) este compatibil; fie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ o soluție a sa. Deci avem relațiile:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} a_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (2)$$

Dacă $\text{rang } A = r$, am observat mai înainte că $r \leq \text{rang } \bar{A}$. Pentru a demonstra că avem egalitatea rangurilor, este suficient să arătăm că orice minor \bar{a}_{r+1} , de ordin $r + 1$, al matricei \bar{A} este nul. Dacă \bar{a}_{r+1} nu conține coloana termenilor liberi, atunci este un minor al matricei A și prin urmare este nul, deoarece $\text{rang } A = r$. Dacă, însă, \bar{a}_{r+1} conține coloana termenilor liberi, atunci este de forma:

$$d_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_r} & b_{i_1} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_r} & b_{i_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_{r+1} j_1} & a_{i_{r+1} j_2} & \dots & a_{i_{r+1} j_r} & b_{i_{r+1}} \end{vmatrix}.$$

Din relațiile (2) obținem:

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ikj} x_j, \quad 1 \leq k \leq r+1. \quad (3)$$

Înlocuind pe b_{ik} , $1 \leq k \leq r+1$, în \bar{d}_{r+1} , se observă că \bar{d}_{r+1} se poate scrie ca o sumă de n minori de forma:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_r} & a_{i_1 j} \alpha_j \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_r} & a_{i_2 j} \alpha_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_{r+1} j_1} & a_{i_{r+1} j_2} & \dots & a_{i_{r+1} j_r} & a_{i_{r+1} j} \alpha_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_r} & a_{i_1 j} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_r} & a_{i_2 j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_{r+1} j_1} & a_{i_{r+1} j_2} & \dots & a_{i_{r+1} j_r} & a_{i_{r+1} j} \end{vmatrix} \alpha_j.$$

Dar acești minori de ordin $r+1$ ai lui A sînt toți nuli, deoarece $\text{rang } A = r$, și deci suma lor este zero, adică $\bar{d}_{r+1} = 0$.

Reciproc, fie $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = r$. Există deci un minor de rang r , nenul, al matricei A astfel încît toți minorii de rang $r+1$ sînt nuli. Putem presupune că acesta este la intersecția primelor r linii și primelor r coloane ale matricei A , adică

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

(această situație este totdeauna realizabilă, deoarece putem renumera convenabil ecuațiile și necunoscutele).

Deoarece $\text{rang } A = r$, rezultă că orice minor de ordin $r+1$ care se obține din acesta prin bordarea sa cu elementele corespunzătoare ale coloanei termenilor liberi și cele ale uneia dintre liniile rămase este nul. Procedînd ca la calculul rangului unei matrice (vezi pct. 2), rezultă că există $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ astfel încît coloana termenilor liberi a matricei \bar{A} să fie combinație liniară de coloanele matricei corespunzătoare minorului ales, cu coeficienții $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$. Deci au loc relațiile:

$$\sum_{k=1}^r a_{ik} \alpha_k = b_i, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4)$$

Relațiile (4) arată că $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0$ este o soluție a sistemului (1), adică sistemul este compatibil.

Utilizarea acestei teoreme, în exemple concrete, necesită, înainte de toate, calculul rangului matricei A . Pentru aceasta trebuie să găsim un minor nenul al lui A , fie acesta d , astfel încît toți minorii care conțin pe d să fie nuli. Orice minor de acest fel îl vom numi *minor principal*. Apoi, este suficient să verificăm că orice minor al matricei \bar{A} , care conține pe d și care nu este minor al lui A , este de asemenea nul. Orice astfel de minor de ordin $r+1$, obținut prin bordarea unui minor principal cu elementele corespunzătoare ale coloanei termenilor liberi, precum și cu cele ale uneia dintre liniile rămase, se numește *minor caracteristic*.

Astfel, teorema lui Kronecker-Capelli se poate enunța și sub forma următoare:

Teorema lui Rouché. Un sistem de ecuații (1) este compatibil dacă și numai dacă toți minorii caracteristici sînt nuli.

Se rezolvă acest sistem cu formulele lui Cramer; el are o soluție unică $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. Numerele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ formează o soluție a sistemului (5), care este și soluție a sistemului (1). Cum valorile $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ ale necunoscutelor secundare x_{r+1}, \dots, x_n sînt alese arbitrar, obținem în acest mod o infinitate de soluții distincte ale sistemului (5), care constituie mulțimea soluțiilor sistemului (1).

Pe de altă parte, orice soluție a sistemului (5) poate fi obținută prin acest procedeu.

În concluzie, fiind dat un sistem de ecuații liniare (1) a cărui rezolvare se cere, procedăm în modul următor:

1. Studiem dacă sistemul este compatibil. Pentru aceasta găsim un minor principal al matricei A a sistemului, apoi calculăm minorii caracteristici.

1° Dacă există cel puțin un minor caracteristic nenul, atunci sistemul este incompatibil.

2° Dacă toți minorii caracteristici sînt nuli, atunci sistemul este compatibil.

2. Pentru găsirea soluțiilor unui sistem compatibil (1), procedăm astfel:

Păstrăm din sistemul (1) ecuațiile care corespund liniilor minorului principal. În aceste ecuații, trecem în membrul drept termenii care conțin necunoscutele secundare, în membrul stîng păstrînd numai termenii care conțin necunoscutele principale. Atribuim necunoscutelor secundare valori arbitrare, apoi calculăm cu ajutorul formulelor lui Cramer valorile necunoscutelor principale, obținînd astfel toate soluțiile sistemului (1).

Pentru ca sistemul compatibil (1) să aibă soluție unică, este necesar și suficient ca rangul matricei sistemului să fie egal cu numărul necunoscutelor.

Exemple. 1) Să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

Să scriem matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ și } \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Deoarece avem } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ iar } \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

și $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$, rezultă că rangul matricei A este 2, iar minorul $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ este principal.

Calculăm minorii caracteristici. Avem doar un singur minor caracteristic și anume:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Deoarece acesta este nenul, sistemul este incompatibil.

2) Să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 6x_1 - 8x_2 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases}$$

Matricea coeficienților are rangul 2, un minor principal al său fiind, de exemplu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -20 \neq 0.$$

Există un singur minor caracteristic și anume

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -8 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Acesta fiind nul, sistemul este compatibil și are soluție unică. Pentru găsirea soluției, rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 6x_1 - 8x_2 = 1. \end{cases}$$

Obținem soluția: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

Se verifică cu ușurință că aceste valori satisfac și ecuația a treia a sistemului inițial.

3) Să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2. \end{cases}$$

Matricea coeficienților are rangul 2, un minor principal al său fiind

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Există doar un singur minor caracteristic

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

care fiind nul, sistemul este compatibil.

Rezolvăm sistemul format de prima și a doua ecuație a sistemului inițial; trecem în membrul drept necunoscutele secundare x_3 , x_4 , x_5 , atribuindu-le valori numerice: $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = \gamma$; (7)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 + \alpha + \beta - \gamma, \\ x_1 - x_2 = -\alpha - \beta + 2\gamma. \end{cases}$$

Aplicind formulele lui Cramer, găsim valorile necunoscutele principale x_1 și x_2

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1 + \gamma}{3}, \\ x_2 &= \frac{1 + 3\alpha + 3\beta - 5\gamma}{3}, \end{aligned} \quad (8)$$

unde α, β, γ sînt numere oarecare.

Egalitățile (7) și (8) dau *soluția generală* a sistemului considerat; necunoscutele secundare putînd lua valori numerice arbitrare, obținem astfel toate soluțiile sistemului dat.

4) Să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ -3x_1 + 3x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -8. \end{cases}$$

Calculăm determinantul sistemului și obținem:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Cu toate că numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute, nu se pot folosi direct formulele lui Cramer, deoarece determinantul sistemului este nul. Matricea coeficienților este de rang 3 un minor principal fiind, de exemplu:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Există un singur minor caracteristic:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

care fiind nul sistemul este compatibil.

Considerăm primele trei ecuații cu necunoscutele principale x_1, x_2, x_3 . Dacă $x_1 = \alpha$ fiind necunoscută secundară, găsim:

$$x_2 = 3 + \alpha, \quad x_3 = 6 + 2\alpha, \quad x_4 = -8.$$

5) Să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = \beta. \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Discuție.

Calculăm determinantul sistemului

$$d \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(\alpha - 1)$$

1. Dacă $\alpha \neq 1$, atunci $d \neq 0$ și sistemul are o unică soluție dată de formulele lui Cramer. Avem $d_1 = \alpha\beta - \alpha - 4\beta - 5$, $d_2 = 3(\beta + 2)$, $d_3 = (1 - \alpha)(2\beta + 1)$ și deci în acest caz,

$$x_1 = \frac{x\beta - \alpha - 4\beta - 5}{3(\alpha - 1)}, \quad x_2 = \frac{\beta + 2}{\alpha - 1}, \quad x_3 = -\frac{2\beta + 1}{3}.$$

2. Dacă $\alpha = 1$, avem $d = 0$ și un minor principal este

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad t \neq 0$$

Există un minor caracteristic.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \beta \end{vmatrix} = -3(\beta + 2)$$

1° Dacă $\beta \neq -2$, minorul caracteristic este nenul, deci sistemul este incompatibil

2° Dacă $\beta = -2$, minorul caracteristic este nul, deci sistemul este compatibil. Pentru aflarea soluțiilor rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 & x_1, \\ 2x_2 + x_3 = 1 & 2x_1, \end{cases}$$

Дадѣ $x_1 = \lambda_1$ имам:

$x_4 = -1$ \wedge $x_7 = 1$, λ sind beliebig

5. **Sisteme de ecuații liniare omogene.** Un sistem de ecuații liniare se numește *omogen* dacă termenul liber al fiecărei ecuații este nul (adică fiecare ecuație este *omogenă*). Așadar, forma generală a unui sistem omogen de ecuații liniare este

[illegible]

Aplicăm rezultatele paragrafului precedent unui sistem omogen. În legătură cu sistemele omogene, observăm următoarele:

1. Un sistem omogen este întotdeauna compatibil. Într-adevăr, termenii liberi fiind nuli, rezultă că adăugind la coloanele matricei sistemului coloana nulă a termenilor liberi rangul nu se schimbă. Deci, conform teoremei Kronecker-Capelli, sistemul este compatibil.

De altfel, aceasta se vede direct, intrucît un astfel de sistem admite soluția nulă: $0, 0, \dots, 0$.

Să presupunem că matricea A a coeficienților este de rang r .

1. Dacă $r = n$ (numărul necunoscutelor), atunci soluția nulă este singura soluție a sistemului (1).

2. Dacă $r < n$ (numărul necunoscutelor), atunci sistemul (1) are și soluții nenule. Pentru a găsi soluțiile, se utilizează același procedeu ca în cazul sistemelor arbitrare.

Observații 1) Remarcăm că un sistem de n ecuații liniare omogene cu n necunoscute are soluții nenule dacă și numai dacă determinantul său este nul.

2) Dacă un sistem de ecuații liniare omogene are numărul ecuațiilor mai mic decât cel al necunoscutelor, sistemul are soluții nenule.

Exemple. 1) Să determinăm valorile parametrului λ pentru care sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$$

are soluții nenule.

Determinantul sistemului este

$$\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9.$$

Acesta este nul pentru $\lambda = \sqrt{3}$ sau $\lambda = -\sqrt{3}$. În aceste cazuri sistemul are soluții nenule.

2) Să rezolvăm sistemul omogen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Calculăm mai întâi, determinantul sistemului, care este nul. Deoarece

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

și toți minorii de ordinul trei care se obțin prin bordarea acestuia cu una dintre coloanele și una dintre liniile rămase sînt nuli, rezultă că acesta este un minor principal.

Pentru a obține soluțiile, dăm necunoscutelor x_3 și x_4 valori arbitrare α , respectiv β , și deducem valorile necunoscutelor x_1 și x_2 din sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4\alpha + 3\beta, \\ 3x_1 + 5x_2 = -6\alpha + 4\beta. \end{cases}$$

Rezultă: $x_1 = 8\alpha - 7\beta$, $x_2 = -6\alpha + 5\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$; α și β fiind numere oarecare

Exerciții

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații cu ajutorul regulii lui Cramer.

$$1. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 10, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + \text{---} - 2x_3 = 2. \\ \quad \quad \quad + 3x_2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2, \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 6x + 4y + z + 2t = 3, \\ 6x + 5y + 3z + 5t = 6, \\ 12x + 8y + z + 5t = 8, \\ 6x + 5y + 3z + 7t = 8. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0, \\ x + y + 2z + 3t = 0, \\ x + 3y + z + 2t = 0, \\ x + 3y + 3z + 2t = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x + y + z + t = 1, \\ 3x - 2y - 5z + 4t = -30, \\ x + 3y + 2z - 3t = 17, \\ x - y + z - t = 2. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x + y + z + t = 2\alpha, \\ 2x + 2z + t = 2\alpha, \\ -2x + 2y - t = 2\alpha, \\ 3x + y - z = 0. \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

11. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} ax + by + cz + dt = 0, \\ bx - ay + dz - ct = 0, \\ cx - dy - az + bt = 0, \\ dx + cy - bz - at = 0, \end{cases}$$

unde a, b, c, d sînt numere reale, cel puțin unul dintre ele fiind nenul.

12. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ ax + by + cz + dt = m, \\ a^2x + b^2y + c^2z + d^2t = m^2, \\ a^3x + b^3y + c^3z + d^3t = m^3, \end{cases}$$

unde a, b, c, d sînt numere diferite între ele, două cite două

13. Să se determine rangurile matricelor:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & -6 \\ 8 & 0 & -5 & 6 \\ 4 & -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 2 & \alpha & -5 \\ \beta & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Să se rezolve sistemele:

$$14. \quad \begin{cases} 2x - 3y + z = 1, \\ -4x + 6y + 2z = 3. \end{cases}$$

$$15. \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 2x + 3y + 6z = 2 \end{cases}$$

$$16. \quad \begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ x + y + z - t = 0, \\ x + y - z + t = 2 \end{cases}$$

$$17. \quad \begin{cases} x + y + z - 2t = 5, \\ 2x + y - 2z + t = 1, \\ 2x - 3y + z + 2t = 3 \end{cases}$$

$$18. \quad \begin{cases} 2x - y + z + 2t = 1, \\ x + y + 2z + t = 2, \\ 3x - 2y + z + 3t = 1 \end{cases}$$

$$19. \quad \begin{cases} x - 3y + z + t = 1, \\ x - 3y + z - 2t = -1, \\ x - 3y + z + 5t = 6 \end{cases}$$

$$20. \quad \begin{cases} 2x - 3y + z = -1, \\ x + 2y - 3z = 0, \\ x - 12y + 11z = -1, \\ 4x - 15y + 9z = 0. \end{cases}$$

$$21. \quad \begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y - 2z = \frac{1}{2}, \\ x + 4y + 5z = 8, \\ 2x - 5y + 6z = 10. \end{cases}$$

$$22. \quad \begin{cases} 5x + 3y - 11z = 13, \\ 4x - 5y + 4z = 18, \\ 3x - 13y + 19z = 22. \end{cases}$$

$$23. \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3, \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

$$24. \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

$$25. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

26. Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} \beta x + \alpha y = \gamma, \\ \gamma x + \alpha z = \beta, \\ \gamma y + \beta z = \alpha \end{cases}$$

are soluție unică, dacă și numai dacă $\alpha\beta\gamma \neq 0$. În acest caz să se rezolve sistemul.

27. Să se determine α și β astfel încât sistemele următoare să fie compatibile

$$1) \quad \begin{cases} 2x - y + z + 2t = 1, \\ 2x + 2y + 4z + 2t = \alpha, \\ 3x - 2y + z + 3t = 1; \end{cases} \quad b) \quad \begin{cases} x - 3y = -2, \\ x + 2y = 8, \\ 3x - y = \alpha, \\ 2x + y = \beta \end{cases}$$

28. Să se determine α , β și γ astfel încât sistemele următoare să fie compatibile, iar matricea sistemului să aibă rangul 2:

$$a) \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + \beta x_4 = \gamma, \end{cases} \quad b) \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 9x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 = 3, \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + \beta x_4 = \gamma. \end{cases}$$

Să se rezolve sistemele următoare. Discuție, după parametri reali α , β , γ , λ

$$29. \quad \begin{cases} 5x - 3y + 2z + 4t = 3, \\ 4x - 2y + 3z + 7t = 1, \\ 8x - 6y - z - 5t = 9, \\ 7x - 3y + 7z + 17t = \lambda \end{cases} \quad 30. \quad \begin{cases} 2x - y + 3z + 4t = 5, \\ 4x - 2y + 5z + 6t = 7, \\ 6x - 3y + 7z + 8t = 9, \\ \lambda x - 4y + 9z + 10t = 11 \end{cases}$$

$$31. \quad \begin{cases} \alpha x + y + z = 1, \\ x + \alpha y + z = 1, \\ x + y + \alpha z = 1. \end{cases} \quad 32. \quad \begin{cases} (1 + \lambda)x + y + z = 1, \\ x + (1 + \lambda)y + z = \lambda, \\ x + y + (1 + \lambda)z = \lambda^2. \end{cases}$$

$$33. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \lambda, \\ \alpha^2 x_1 + \beta^2 x_2 + \gamma^2 x_3 = \lambda^2. \end{cases} \quad 34. \quad \begin{cases} \alpha x + y + z = 1, \\ x + \beta y + z = 1, \\ x + y + \gamma z = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + 2z = 1, \\ \alpha x + (2\beta - 1)y + 3z = 1, \\ \alpha x + \beta y + (\beta + 3)z = 2\beta - 1. \end{cases} \quad 36. \quad \begin{cases} \alpha x + (\alpha + 1)y + (\alpha + 2)z = \alpha + 3, \\ \beta x + (\beta + 1)y + (\beta + 2)z = \beta + 3, \\ x + \gamma y + \gamma^2 z = \gamma^3 \end{cases}$$

37. Să se determine α astfel încât sistemul următor să aibă soluții nenule și, în acest caz, să se rezolve:

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 0, \\ 2x - y + 3z - 3t = 0, \\ x + y + z + t = 0, \\ 2x + (\alpha - 1)y + 2z + \alpha t = 0. \end{cases}$$

38. Să se rezolve și să se discute după valorile parametrului λ , sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} (3 + 2\lambda)x + (1 + 3\lambda)y + \lambda z + (\lambda - 1)t = 3, \\ 3\lambda x + (3 + 2\lambda)y + \lambda z + (\lambda - 1)t = 1, \\ 3\lambda x + 3\lambda y + 3z + (\lambda - 1)t = 1, \\ 3\lambda x + 3\lambda y + \lambda z + (\lambda - 1)t = 1. \end{cases}$$

39. Să se afle inversele matricelor de ordin n :

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(vezi exercițiul 14, cap. IV).

40. Să se rezolve ecuațiile matriciale:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \\ \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(vezi exercițiul 21, cap. IV).



Indicații. Răspunsuri

Cap. I

$$1. \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad 2. \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \sigma^4 = \sigma$$

Deci $k = 4$. 8. Considerăm șirul $\{\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^k, \dots\}$. Cum S_n este o mulțime finită acest șir este finit. Deci există $k \neq l$ astfel încât $\sigma^k = \sigma^l$. Dacă $k > l$ atunci notând $p = k - l$ obținem $\sigma^p = e$. 5. $m(\sigma) = 2, \varepsilon(\sigma) = +1, m(\sigma) = 3; \varepsilon(\sigma) = -1, m(\sigma) = 3, \varepsilon(\sigma) = -1, m(\sigma) = 8, \varepsilon(\sigma) = +1, m(\sigma) = 14, \varepsilon(\sigma) = +1, m(\sigma) = 13, \varepsilon(\sigma) = -1$. 6. $(12), (13); (14); (23); (24), (34)$. 7. $H = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$ și fie $\sigma \in H$. Considerăm produsele $\sigma\sigma_1, \sigma\sigma_2, \dots, \sigma\sigma_p$ care sînt elemente distincte două cîte două. Deci $H = \{\sigma\sigma_1, \sigma\sigma_2, \dots, \sigma\sigma_i\}$. Deci $\sigma \in \{\sigma\sigma_1, \sigma\sigma_2, \dots, \sigma\sigma_p\}$; $\sigma = \sigma\sigma_k \Rightarrow \sigma_k = e, e \in H \Rightarrow e = \sigma\sigma_r \Rightarrow \sigma^{-1} = \sigma_r$. 8. Fie transpoziția

$$\sigma_2 = (13), \sigma' = \sigma_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (23)(45) \text{ și deci } \sigma = (13); (23), (45), \tau = (16); (24), (35), (45)$$

$$9. \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad 10. \text{ Pentru } i = 8, j = 3, \sigma \text{ este pară.}$$

$$\text{Pentru } i = 3, j = 8, \sigma \text{ este impară. } 11. m(\sigma) = \frac{(n-1)n}{2}, \sigma \text{ este pară dacă } n = 4k \text{ sau}$$

$$n = 4k + 1 \text{ și } \sigma \text{ este impară dacă } n = 4k + 2 \text{ sau } n = 4k + 3. \quad 12. m(\sigma) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

13. Presupunem că $\sigma(i) = j, i \neq j$. Cum $n \geq 3$, există numerele $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încît $k \neq l$ și $i \neq k, i \neq l$. Din ipoteză avem în particular $(jk)\sigma = \sigma(jk)$ și $(jl)\sigma = \sigma(jl)$. Din aceste două egalități obținem $k = j$ și $l = j$ deci $k = l$ contradicție. Deci $\sigma = e$.

Cap. II

3. Din $AB = BA$ rezultă că $A^r B^s = B^s A^r$ oricare ar fi numerele naturale r și s și apoi se aplică în produsul $(A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \dots + AB^{k-2} + B^{k-1})$. 4. Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din egalitatea $AX = XA$ se obține că $c = -2b, d = a + 3b$ unde $a, b \in \mathbb{Q}$. 5. $A^n =$

$$= \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}. \quad 7. f(A) = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 14 \\ 7 & 6 & -3 \\ 19 & -7 & 26 \end{pmatrix}. \quad 8. A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \quad 9. \text{ Se arată că}$$

suma elementelor de pe diagonala principală a matricei $AB - BA$ este zero.

10. a) $A = \pm I_2$ sau $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, unde $a^2 = 1 - bc$. b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, unde $a^2 = -bc$.

11. $x = 1, y = -1, z = 2, u = 3, v = -3, w = 1$. 12. $X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. 13. $x = 3, y = 2$

$$14. \begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ -n & 2n & 3n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{pmatrix}.$$

15. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3p \\ 3p & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dacă $n = 3p$; $\begin{pmatrix} \omega & \omega^2 & 3p+1 \\ 3p+1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$ dacă $n = 3p+1$; $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3p+2 \\ 3p+2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

dacă $n = 3p+2$. 16. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 17. $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$18. A^n = \begin{pmatrix} \frac{[1 + (-1)^n]a^n}{2} & \frac{[1 - (-1)^n]a^n}{2} \\ \frac{[1 - (-1)^n]a^n}{2} & \frac{[1 + (-1)^n]a^n}{2} \end{pmatrix} \quad 19. \text{ Dacă } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ din } A^2 = 0 \text{ obținem}$$

$a^2 + bc = 0$; $b(a+d) = 0$; $c(a+d) = 0$; $cb + d^2 = 0$; dacă $a+d \neq 0$, atunci $b = c = 0$ și deci $a = d = 0$, contradicție. Deci $a+d = 0$. 20. O soluție este $b = 1, c = 1 - a^2, d = -a$ unde $a \in \mathbb{Z}$. 22. Se scrie $a = r \cos \alpha, b = r \sin \alpha$, unde $|r| < 1$. Se obține $a_n = r^n \cos n\alpha; b_n = r^n \sin n\alpha$. 23. Dacă 2 nu divide pe $m - n$ atunci numărul căutat este zero. Dacă 2 divide pe $m - n$ atunci numărul căutat este $2^{(m-1)(n-1)}$.

$$24. \begin{pmatrix} \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} & \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \\ n + \frac{\sin n\alpha \cos (n+1)\alpha}{\sin \alpha} & n - \frac{\sin n\alpha \cos (n+1)\alpha}{\sin \alpha} \end{pmatrix}.$$

Cap. III

1. a) -15 , b) 7 , c) $a^2 + b^2$, d) 1 ; e) $\sin(\alpha + \beta)$; f) 0 ; g) 0 ; h) 0 , i) -1 ; j) $2\omega^2$; k) 0 .
2. a) -9 ; b) -50 , c) 2 , d) $a^3 + 2b^2 - 3ab^2$; e) $-3 - 6\omega$, f) $(a^2 - b^2)^2$; g) $(a^2 + b^2)^2$.
3. a) Permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ are 6 inversiuni. Deci semnul termenului este $+$;

b) Semnul termenului este $(-)$; c) Semnul este $(-)$ 4. Termenii de la a), b) și c) nu se găsesc în determinantul de ordinul 4 5. Semnul este $(+)$ 6. Produsul elementelor de pe diagonala secundară este $a_{1n}a_{2n-1}a_{3n-2} \dots a_{n1}$. Acest produs are semnul egal cu semnul permutării $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Această permutare are semnul egal cu

$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 7. Trebuie ca $\{k_s, k_n\} = \{3, 6\}$ Deci $k_s = 3$ și $k_n = 6$ sau $k_s = 6$ și $k_n = 3$.

8. a) $n!$; b) $n!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 9. Dacă d^* este determinantul matricei transpuse se observă folosind definiția determinantului că $d^* = \bar{d}$ Cum $d^* = \bar{d}$, atunci $d = \bar{d}$ și deci d este un număr real. 10. a) 1, b) 160; c) -231; d) 1; e) 0, f) 5; g) 30; h) $(af - bc + cd)^2$, i) -1 069 12. 0, 0, $a^2 + b^2 + c^2$. 18. Se obține ecuația $(x+1)(x^2 - x + 1)^2 = 0$. 14. Se obține o ecuație de gradul 4 care are rădăcinile $a, a, a, -3a$. 15. Se scade linia 1 din fiecare celelalte linii, apoi se adună la coloana 1 suma celorlalte coloane. Se obține $(-1-a)^{n-1}(n-1)a - 1$. 16. $d = 4$. 17. $d = 0$.

Cap. IV

1. a) 1, b) 2; c) Dacă $\alpha = -6$ rangul este 1, iar dacă $\alpha \neq -6$ rangul este 2 2. a) 2, b) 2; c) Pentru $\alpha = -21$ rangul este 2, iar dacă $\alpha \neq -21$, rangul este 3. 3. a) 4; b) 4, c) 3. 4. a) 4; b) 4 5. m 6. 0; 1; 2 7. Pentru $\alpha = -45/4$ matricea are rangul minim și anume 3. 8. Pentru $\alpha = 3$ rangul este egal cu 2, iar pentru $\alpha \neq 3$ acesta este 3

9. Se folosesc proprietățile determinantilor. 10. a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ 11. a) Dacă $ad = bc$, matricea nu este inversabilă, dacă $ad \neq bc$

matricea este inversabilă, inversa sa fiind $\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; b) Pentru $a = b = 0$

matricea nu este inversabilă; în caz contrar, matricea este inversabilă, inversa sa fiind

$\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. 12. a) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, c) Pentru $\alpha = \frac{3}{4}$

matricea nu este inversabilă; pentru $\alpha \neq \frac{3}{4}$ este inversabilă, inversa sa fiind

$\frac{1}{3 - 4\alpha} \begin{pmatrix} \alpha & 2(3 - \alpha) & 3 \\ -\alpha & 2\alpha + 3 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$. 13. a) $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

14. a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; c) Pentru $\lambda \in \{-2, 1\}$

matricea nu este inversabilă; în caz contrar, matricea este inversabilă, inversa sa fiind

$$\frac{1}{(\lambda - 1)(\lambda + 2)} \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix}. \quad 15. \text{ Avem } B^{-1} = \frac{-1}{60} \begin{pmatrix} 15 & 15 & -15 \\ -6 & -6 & -6 \\ -8 & 12 & -8 \end{pmatrix}.$$

15. a) Dacă în matricea A se permută între ele liniile i și j , atunci în matricea A^{-1} se permută între ele coloanele i și j , b) Dacă se înmulțește linia i cu $\lambda \neq 0$, atunci în A^{-1}

se înmulțește coloana i cu $\frac{1}{\lambda}$; c) Dacă la linia i se adaugă linia j înmulțită cu λ , atunci

în A^{-1} , coloana i înmulțită cu λ se scade din coloana j . 18. a) Înmulțim la stînga ambii

membri ai ecuației cu inversa matricei $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ care este $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ și obținem

$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; b) Înmulțim la dreapta ambii termeni ai ecuației cu inversa matricei

$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, adică cu $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ și obținem $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 46 & 12 \\ -49 & -11 \end{pmatrix}$. 19. Înmulțim

la stînga cu inversa matricei $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$, adică cu $-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, și la dreapta cu inversa

matricei $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, adică cu $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, și obținem $X = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -7 & 20 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$. 20. Avem

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 4 & -8 \\ -9 & 16 & -1 \\ -4 & 24 & -16 \end{pmatrix}. \quad 21. X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22. \text{ Avem } X &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1. $x_1 = 6, x_2 = 4, x_3 = 6$. 2. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. 3. $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 3$
 4. $x_1 = \frac{5}{11}, x_2 = \frac{16}{11}, x_3 = \frac{13}{11}$. 5. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = t$. 6. $x_1 = 1, x_2 = 2,$
 $x_3 = 3, x_4 = 2$ 7. $x = -1, y = 2, z = -1, t = 1$. 8. $x = y = z = t = 0$ 9. $x = -1,$
 $y = 2, z = 3, t = 2$ 10. $x = 2\alpha, y = 2\alpha, z = -4\alpha, t = 6\alpha$ 11. Determinantul
 sistemului este $-(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \neq 0$, deci soluția este $x = y = z = t = 0$
 12. Sistemul are soluția unică:

$$x = \frac{(d-m)(c-m)(b-m)}{(d-a)(c-a)(b-a)}, \quad y = \frac{(d-m)(c-m)(m-a)}{(d-b)(c-b)(b-a)},$$

$$z = \frac{(d-m)(m-a)(m-b)}{(d-c)(c-a)(c-b)}, \quad t = \frac{(m-a)(m-b)(m-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

13. a) 3, b) 3, c) Pentru $\alpha = 15$ și $\beta = \frac{2}{5}$ rangul matricei este 1, pentru $\alpha \neq 15$ sau
 pentru $\beta \neq \frac{2}{5}$ rangul este 2 14. $x = \lambda, y = \frac{1}{12} + \frac{2\lambda}{3}, z = \frac{5}{4}$, unde λ este un număr
 oarecare 15. $x = 1 - 3\lambda, y = 0, z = \lambda$, λ fiind un număr oarecare. 16. $x = \lambda, y = 1 - \lambda,$
 $z = -\frac{1}{2}, t = \frac{1}{2}$, λ fiind un număr oarecare 17. $x = 2, y = 1 + \lambda, z = 2 + \lambda, t = \lambda$,
 λ fiind un număr oarecare. 18. $x = 1 - \lambda - \mu, y = 1 - \lambda, z = \lambda, t = \mu$, λ și μ fiind
 numere oarecare 19. Sistemul este incompatibil 20. Sistemul este incompatibil
 21. $x = \frac{\lambda}{3}, y = \frac{6 - 4\lambda}{3}, z = \lambda$, λ fiind un număr arbitrar 22. Sistemul este incompatibil.
 23. $x_1 = 2 - \alpha - \beta, x_2 = 3 + \alpha + \beta, x_3 = \alpha, x_4 = -\beta$, α și β fiind numere oarecare.
 24. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ 25. $x_1 = \frac{1 + 5\lambda}{6}, x_2 = \frac{1 - 7\lambda}{6}, x_3 = \frac{1 + 5\lambda}{6}, x_4 = \lambda$ unde
 λ este un număr oarecare 26. Determinantul sistemului este $-2\alpha\beta\gamma$ și totuși rezultă
 din regula lui Cramer $x = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}, y = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}, z = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$.
 27. a) $\alpha = 4$ b) $\alpha = 2, \beta = 3$ 28. a) $\alpha = -1, \beta = -1, \gamma = 1$ b) $\alpha = 2, \beta = -2,$
 $\gamma = -2$ 29. Pentru $\lambda \neq 0$ sistemul este incompatibil, pentru $\lambda = 0$ sistemul este com-
 patibil: $x = \frac{-5\alpha - 13\beta - 3}{2}, y = \frac{-7\alpha - 19\beta - 7}{2}, z = \alpha, t = \beta$, unde α și β sînt
 numere oarecare 30. Pentru $\lambda = 8$ soluția sistemului este $x = \alpha, y = 4 + 2\alpha - 2\beta,$
 $z = 3 - 2\beta, t = \beta$, unde α și β sînt numere oarecare, pentru $\lambda \neq 8$ soluția sistemului
 este $x = 0, y = 4 - 2\beta, z = 3 - 2\beta, t = \beta$, unde β este un număr oarecare, 31. Dacă $\alpha \neq 1$
 și $\alpha \neq -2$ sistemul are soluție unică $x = y = z = \frac{1}{\alpha + 2}$; dacă $\alpha = 1$ soluția este
 $x = 1 - \lambda - \mu$, unde λ și μ sînt numere oarecare, dacă $\alpha = -2$ sistemul este
 incompatibil 32. Dacă $\lambda \neq 0$ și $\lambda \neq -3$ sistemul are soluție unică $x = \frac{2 - \lambda^3}{\lambda(\lambda + 3)},$
 $y = \frac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}, z = \frac{\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}$, dacă $\lambda = 0$ sau $\lambda = -3$ sistemul este incom-

patibil. 83. Dacă α, β, γ sînt diferite între ele două cîte două, atunci sistemul are soluție unică: $x_1 = \frac{(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)}$, $x_2 = \frac{(\alpha - \lambda)(\gamma - \lambda)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)}$, $x_3 = \frac{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}$; dacă $\alpha = \beta$, $\alpha \neq \gamma$, $\lambda = \alpha$ sau $\lambda = \gamma$, soluțiile depind de un număr arbitrar; dacă $\alpha = \gamma$, $\alpha \neq \beta$, $\lambda = \alpha$ sau $\lambda = \beta$, soluțiile depind de un număr arbitrar; dacă $\beta = \gamma$, $\alpha \neq \beta$, $\lambda = \alpha$ sau $\lambda = \beta$, soluțiile depind de un număr arbitrar; în celelalte cazuri, sistemul este incompatibil. 84. Determinantul sistemului este $d = \alpha\beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 2$. Dacă $d \neq 0$ sistemul are soluție unică: $x = \frac{(\beta - 1)(\gamma - 1)}{d}$, $y = \frac{(\alpha - 1)(\gamma - 1)}{d}$, $z = \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{d}$; dacă $d = 0$, atunci distingem situațiile: 1° două dintre numerele α, β, γ sînt egale cu 1, atunci soluția sistemului depinde de un număr arbitrar; 2° $\alpha = \beta = \gamma = 1$, soluția sistemului depinde de două numere arbitrare; 3° α, β, γ sînt toate diferite de 1, sistemul este incompatibil. Cazul în care $d = 0$ și unul singur dintre numerele α, β, γ să fie egal cu 1 este imposibil. 85. Determinantul sistemului este $d = \alpha(\beta^2 - 1)$. Dacă $\alpha \neq 0$ și $\beta \neq \pm 1$ sistemul are soluție unică dată de formulele lui Cramer. Dacă $\alpha = 0$, $\beta = 5$, avem $x = \lambda$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{4}{3}$, cu λ arbitrar; dacă $\alpha = 0$, $\beta \neq 1$ și $\beta \neq 5$, sistemul este incompatibil; dacă $\beta = 1$, avem $x = \lambda$, $y = 1 - \alpha x$, $z = 0$ cu λ arbitrar; dacă $\beta = -1$, sistemul este incompatibil. 86. Determinantul sistemului este $d = (\gamma - 1)^2(\alpha - \beta)$; dacă $\gamma \neq 1$ și $\alpha \neq \beta$ sistemul are soluție unică: $x = \gamma$, $y = -2\gamma - 1$, $z = \gamma + 2$; dacă $\alpha = \beta$ și $\gamma \neq 1$ sistemul este compatibil nedeterminat; dacă $\alpha = \beta$ și $\gamma = 1$ sistemul este compatibil determinat; dacă $\alpha \neq \beta$ și $\gamma = 1$ sistemul este compatibil nedeterminat. 87. Sistemul are soluții nenule pentru $\alpha = 0$. 88. Pentru $\lambda \neq 1$ și $\lambda \neq 3$, sistemul are o unică soluție: $x = \frac{2}{3 - \lambda}$, $y = z = 0$, $t = \frac{3 - 7\lambda}{(\lambda - 1)(3 - \lambda)}$; pentru $\lambda = 1$, sistemul este incompatibil, iar pentru $\lambda = 3$, soluția este: $x = -\frac{17}{9} - \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{9}\beta$, $y = 2$, $z = \alpha$, $t = \beta$, unde α și β sînt numere oarecare.

$$39. a) \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}; \quad b) \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2-n \end{pmatrix}.$$

$$40. a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bibliografie

1. Faddeev D. K. și Sominski I. S., *Culegere de probleme de algebră superioară*, Editura Tehnică, 1954.
2. Kuroș A. G., *Curs de algebră superioară*, Editura Tehnică, 1950.
3. Stamate I. și Stoian I., *Culegere de exerciții și probleme de algebră*, Editura Didactică și Pedagogică, 1979.

CUPRINS

Capitolul I. Permutări	3
1. Noțiunea de permutare	3
2. Produsul (compunerea) permutărilor	4
3. Transpoziții	5
4. Inversiunile unei permutări. Signatura (semnul) unei permutări	6
5. Descompunerea unei permutări în produs de transpoziții	8
Exerciții	9
Capitolul II. Matrice	10
1. Noțiunea de matrice	11
2. Operații cu matrice	12
3. Transpusa unei matrice	18
Exerciții	18
Capitolul III. Determinanți	21
1. Determinanți de ordinul 2 și 3	21
2. Definiția determinantului de ordinul n	25
3. Proprietățile determinantilor	27
4. Interpretarea geometrică a determinantului de ordinul 3	32
5. Calculul determinantilor	38
Exerciții	38
Capitolul IV. Rangul unei matrice. Matrice inversabile	41
1. Rangul unei matrice	41
2. Matrice inversabile	44
Exerciții	47
Capitolul V. Sisteme de ecuații liniare	50
1. Noțiuni generale	50
2. Regula lui Cramer	51
3. Calculul rangului unei matrice	56
4. Sisteme de ecuații liniare	59
5. Sisteme de ecuații liniare omogene	65
Exerciții	67
Indicații. Răspunsuri	71

